

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 9
mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt ƒ 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ 21,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Leraar wiskunde en didaktiek aan een Pedagogische Akademie

ED DE MOOR

Amsterdam

In het voorjaar van '73 sprak Drs. T.A.C.M. Gerritsen (inspekteur van de inspektie voor de onderwijzersopleiding) zijn zorgen uit over het grote aantal 'onbevoegd' gegeven lessen *wiskunde en didaktiek* aan de Pedagogische Akademies. Dit was de eerste aanleiding voor mij om dit stukje te schrijven.

Sinds augustus 1971 spreken wij van het vak *wiskunde en didaktiek*, dat vóór die tijd respektievelijk rekenkunde en rekendidaktiek heette. Officieel heet het vak nog rekendidaktiek, een naamgeving, die de doelstellingen op minstens twee punten te kort doet.
Dat vak werd en wordt gegeven door leraren met bevoegdheden als: de volledige bevoegdheid als onderwijzer, de akten l.o.-wiskunde, MO-A en B tot en met doktor in de wiskunde. Bevoegd is degene met de eerstegraads bevoegdheid voor het vak wiskunde.
In sommige gevallen wordt het vak door een pedagogiek-leraar gegeven. Veelal betekende het vak rekendidaktiek vroeger niet meer dan een training van de aanstaande onderwijzer in het maken van rekensommen en het laten geven van rekenlessen.

Ik herinner me uit de tijd, dat ik leraar was bij het V.W.O., dat het beneden je stand was om als eerste-graads-leraar aan een kweekschool (thans Pedagogische Akademie geheten) les te gaan geven. Door verandering van funktie werd ik gedurende het kursusjaar '71-'72 voor enkele uren als wiskunde-leraar aan een P.A. benoemd en diende daar het toen door enkele medewerkers van het IOWO zojuist gekreëerde vak *wiskunde en didaktiek* te gaan geven. Voorwaar, geen geringe opgave! Op dat moment herinnerde ik me plotseling de tijd, dat ik iemand eens handelsrekenles gaf door precies één les voor te blijven. Gelukkig was er echter goed materiaal voorhanden, te weten de blokken 'Greep en Oriëntatie', 'Grafische verwerking', 'Meten', 'Verzamelingentaal en tellen', alle ontworpen door Fred Goffree, die mij af en toe ook met raad terzijde stond.
Inmiddels zijn aan de blokken nog toegevoegd 'Operaties in IN' (Fred Goffree en Huub Jansen) en 'De teerling is geworpen', waarover zo dadelijk nog meer.

Een andere gelukkige omstandigheid was dat ik bijzonder prettige leerlingen ontmoette, die het geenszins merkwaardig vonden een op dit gebied volkomen onervaren leraar te krijgen. Een leraar, die nog nooit een les rekenen op een basisschool had gegeven, maar die wel als opdracht had dit zijn leerlingen te onderwijzen! Een hopeloze situatie? Ach, in feite was ik de eerste jaren bij het V.W.O. niet erg veel beter op mijn toenmalige taak voorbereid. Goed, ik zal wel heel wat fouten gemaakt hebben, maar het was wel een openbaring leraar te mogen zijn aan een P.A. Men treft er een gemotiveerd publiek, de studenten hebben gekozen onderwijzer te willen worden en er wordt in dit gedeelte van het onderwijsveld iets aan wiskunde, wiskunde-onderwijs en wiskunde-didaktiek gedaan.

Sinds 1971 zet de afdeling WISKOBAS (wiskunde op de basisschool) van het IOWO zich in voor de ontwikkeling van een nieuw leerplan wiskunde voor het basisonderwijs.
Tegelijkertijd startte men op vele P.A.'s met het hierboven reeds genoemde *wiskunde en didaktiek*-programma.

De leraren *wiskunde en didaktiek* hebben tot nu toe aan drie konferenties deelgenomen (Egmond '69, '71, '72).
Sinds 1971 kunnen onderwijzers zich heroriënteren via kursussen (h.o.-kursussen), die door het IOWO ontworpen zijn en aan de P.A.'s gegeven worden onder begeleiding van een wiskundige en pedagoog in de vorm van team-teaching.

Kortom, het zoemt van aktiviteiten op het gebied van wiskunde-onderwijskunde-didaktiek aan de P.A.
Het niveau van de opleiding zal langzamerhand door de interne en externe kadervorming van het IOWO opgevoerd worden. Verschillen tussen de diverse P.A.'s zullen er ongetwijfeld blijven, ook al omdat het de bedoeling is, dat iedere P.A. zijn eigen keus doet uit een verzameling blokken om zijn wiskunde en didaktiek-werkplan samen te stellen.

Als wij het onderwijs willen vernieuwen zullen wij op het nivo van de 5-6 jarigen moeten beginnen. Derhalve dienen wij de kleuterleidsters en onderwijzers zo goed mogelijk op te leiden (en te salariëren). Daarnaast moet een voortdurende heroriëntering van de onderwijzers mogelijk gemaakt worden. Ook in dit opzicht zal 'éducation permanente' kunnen bijdragen tot een gelukkiger maatschappij.

Terug naar het wiskunde-onderwijs. Tijdens de voorbereidende studies van WISKOBAS voor het zogeheten integratieplan, waarover zodadelijk meer, ontstond een artikel 'De Klok' van Adri Treffers.* In deze fundamentele beschouwing over wiskunde-onderwijs gaat de schrijver uit van een 'aktief, gedifferentieerd, vertikaal gepland onderwijsgebeuren, waarin het struktuurkarakter, het taalaspekt,

* Adri Treffers: 'De Klok' (hoofdstuk I van 'maTEMAtika, handboek voor de onderwijzer', uitgave van het IOWO).

de toepasbaarheid, de dynamiek en de specifieke benaderingswijze van de wiskunde' tot hun recht komen. Aan talrijke voorbeelden, grotendeels gedemonstreerd aan een klok, worden deze acht aspekten van het wiskunde-onderwijs nog eens toegelicht, althans voor de leeftijdsgroep 5-12. De wiskunde- en pedagogiekleraren aan P.A.'s hebben indirekt bijgedragen tot dit voortreffelijke artikel (externe kadervorming) en zij kunnen er achteraf weer direkt kennis van nemen en verder uitdragen in hun h.o.-kursussen. In vele gevallen is men tot een goede vorm van teamteaching (wiskunde-pedagogiek) op de h.o.-kursussen geraakt en heeft men interesse voor elkanders vakgebied kunnen wekken. Zo leert men, al doende, steeds meer greep te krijgen op het vak *wiskunde en didaktiek.* De wiskundeleraar aan de P.A. kan momenteel de ontwikkeling van een nieuw leerplan voor wiskunde van nabij meemaken en met de onderwijzers van de h.o.-kursussen, de inspekteurs, de medewerkers van het IOWO en anderen, mede de richting helpen bepalen.

Eind 1975, begin 1976, zal het hierboven genoemde integratieplan aan een groter publiek voorgelegd worden. Een belangrijke fase van een demokratische leerplanprocedure wordt hiermee ingeluid.

Het hierboven genoemde artikel 'De Klok' is inmiddels gepubliceerd in het 'Handboek voor de Onderwijzer' (maTEMAtika), een eerste aanloop tot dit integratieplan.

Hebben wij ons tot nog toe beziggehouden met wat er zo al gebeurt in de wereld van de wiskunde- en didaktiekleraren aan de P.A., de vraag blijft bestaan wie wie dan wel opleidt tot leraar *wiskunde en didaktiek.* Deze vraag kan natuurlijk ook op een ander niveau gesteld worden: wie leidt wie tot wiskundeleraar op?

Geven de zojuist ontstane lerarenopleidingen hierop een antwoord? Ik heb begrepen, dat dikwijls de zojuist afgestudeerde, knappe vakspecialisten, vaak verstoken van enige onderwijservaring, als docenten aan de lerarenopleidingen worden gekozen.

Van nabij heb ik onlangs nog meegemaakt hoe studenten aan één onzer universiteiten kunnen recalcitreren tegen de verplichte vakdidaktiek colleges. Ik wens oprecht, dat iedere wiskundeleraar eens in de voortreffelijke boeken van G. Polya zal lezen en eens een blik zal slaan in het boek 'Guidelines for teaching mathematics' van Johnson en Rising, dat nogal eens gebruikt schijnt te worden door de vakdidaktici.

Wat is er eigenlijk tegen didaktiek? Wel, ik denk dat velen, die onderwijs moeten geven in 'vakdidaktiek' zelf niet weten wat dit vak inhoudt. Men is òf algemeen vakspecialist, ik bedoel puur theoreticus, niet aan een vak gebonden, òf vakspecialist.

Het is duidelijk dat een puur didakticus geen speciale didaktiek van een vak kan geven, terwijl de vakspecialist (wiskundige) vaak te weinig van onderwijskunde weet om studenten hiermee te kunnen boeien.

Natuurlijk kennen wij door de jaren heen in Nederland een rij wiskunde-didaktici, die door hun kennis van de wiskunde, langdurige routine in het onderwijs en

zelfstudie als zodanig aangemerkt dienen te worden, maar een regelrechte opleiding tot vakdidakticus bestaat in ons land niet. Ik meen, dat alleen Polen hierin een afstudeerrichting kent.

Natuurlijk hebben ook de leraren *wiskunde en didaktiek* aan de P.A.'s geen aparte opleiding gehad. Maar wel is het zo, dat juist zij midden in de ontwikkeling van het wiskunde- en didaktiekonderwijs staan, hetgeen moge blijken uit de grote betrokkenheid van deze leraren bij de leerplanontwikkelingsprocedure.
Dit werd mij eens te meer duidelijk bij lezing van de doktoraalskriptie onderwijskunde van Fred Goffree: 'Kans voor het onderwijs'.** In deze skriptie doet hij verslag van een interessant stuk leerplanontwikkeling, grotendeels geënt op de ontwikkeling van een stuk onderwijsleerpakket ('De teerling is geworpen'), een blok voor de P.A. over het gebied van de statistiek en kansrekening. Een gedeelte van dit blok is tot stand gekomen in samenwerking met een 15-tal leraren *wiskunde en didaktiek* van de P.A.'s. En zo vormen deze leraren, die vaak al veel gemotiveerder aan hun leraarschap zijn begonnen, zich tot didaktici op het gebied van de *wiskunde en didaktiek.*
Goffree noemt in zijn skriptie 5 belangrijke stellingen in verband met de visie op het vak wiskunde en didaktiek in de opleiding voor onderwijzers:

1 In de onderwijzersopleiding wordt slechts *een basis* gelegd voor verdere ontwikkeling tot onderwijzer, zowel wat vakinhouden als wat praktische onderwijszaken betreft.
2 Het vak *wiskunde en didaktiek* is opgebouwd uit *drie* komponenten: wiskunde, onderwijskunde en praktijk.
3 De inhoud en vorm van het vak *wiskunde en didaktiek* dient in nauwe relatie met de algemene integrale en mathematische doelstellingen, zoals die in *'De Kubus'**** zijn gesymboliseerd, tot stand te komen.
4 De drie komponenten van het vak moeten zo funktioneel mogelijk, *integraal* in het onderwijs naar voren komen.
5 Elke P.A. moet in de gelegenheid worden gesteld een eigen schoolwerkplan samen te stellen uit de verzameling *'blokken'*, die een maximaal beschrijvend leerplanreservoir vormen.

Gaarne stel ik mij achter deze stellingen. Men kan deze stellingen echter ook van toepassing laten zijn op de leraarsopleiding. Het is opmerkelijk, dat deze publikatie juist weer vanuit en binnen het veld van de P.A.-wiskunde-didaktici geschiedt. Al met al kunnen we stellen, dat, hoewel wij met de wiskunde-didaktiek nog maar in de kinderschoenen staan, er juist binnen het kader van de P.A. wiskunde-didaktiek heel wat van de grond gekomen is. Het is te hopen, dat hiervan het een en

** Fred Goffree: 'Kans voor het onderwijs', interne publikatie van het IOWO.
*** Adri Treffers: 'De Kubus' (interne publikatie van het IOWO). De 8 uitgangspunten (hoekpunten) voor het wiskunde-onderwijs, hierboven genoemd, vormen samen met de 12 algemeen integrale en algemeen mathematische doelen (ribben) en de 6 leerstofvlakken (vlakken) de zogenaamde doelstellingenkubus voor het wiskunde-onderwijs.

ander zal overslaan op andere delen van ons onderwijs, in het bijzonder op de lerarenopleidingen.
Toen ik voor de eerste maal deelnam aan een konferentie van wiskunde- en pedagogiekleraren van de P.A.'s (Egmond 1971), ging er voor mij een nieuwe wereld open. Welk een ander soort leraren treft men hier dan de leraren, die ik gewend was binnen het V.W.O. te ontmoeten. Ik wil maar zeggen, dat naarmate meer wiskundeleraren dit zullen ervaren, ik me over de zorgen van inspekteur Gerritsen niet zoveel zorgen meer maak.

Examens Statistisch Assistent en Analist-VVS 1974

Onder toezicht van het ministerie van Economische Zaken zal de Vereniging voor Statistiek de examens Statistisch Assistent en Analist-VVS in 1974 afnemen op de volgende data:
Statistisch Assistent-VVS (alleen schriftelijk)
op woensdag 29 mei 1974 van 13.45 tot 16.45 uur
Statistisch Analist-VVS
schriftelijk gedeelte: donderdag 30 mei 1974 van 13.45 tot 16.45 uur
mondeling gedeelte: 26, 27 en 28 juni 1974.
Met ingang van de examens 1974 geldt voor beide examens, dat de kandidaten, die door de examencommissie net niet voldoende worden gekwalificeerd, een mondeling verlengd examen mogen afleggen. Dit zal worden afgenomen op 1 en 2 oktober 1974. De schriftelijke examens worden afgenomen in Musis Sacrum te Arnhem, de mondelinge in het Bouwcentrum te Rotterdam.
De examenkosten bedragen f. 50,– per examen.
Degenen, die aan de examens wensen deel te nemen, dienen zich vóór 1 mei 1974 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie, de heer R. Tillemans, Bolthagen 4 te Zevenaar. Aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij Mevr. M. den Ouden, Weena 700 te Rotterdam, telefoon 010-116181 tst. 2126.

Het examen in methodiek en didaktiek voor de akte wiskunde l.o.

Ten behoeve van aanstaande examenkandidaten publiceert de examencommissie enkele verslagen van examens die in 1973 werden afgelegd. De meeste kandidaten brachten een zelfgemaakt werkstuk mee en zij kregen de gelegenheid dit toe te lichten. Weergave van dit deel van het examen zou uitvoerige citaten vereisen. In het volgende is hiervan afgezien zodat de meeste examens slechts fragmentarisch zijn weergegeven.
De gesprekken worden gevoerd tussen *E*(xaminator) en *K*(andidaat).

E U vermeldt dat u bestudeerde 'Kriteria voor de ordening van de leerstof' door drs. J. van Dormolen. Hoe hebt u hiermee kennis gemaakt?
K Doordat ik ook enige wiskundelessen op de mavo geef, was het voor mij mogelijk de bijeenkomsten van de CCBMW bij te wonen.
E Wat is de CCBMW?
K Dat is de Centrale Commissie Begeleiding Mavo-Wiskunde. Het is een commissie die steun geeft aan de wiskundeleraren op de mavoscholen door regionale bijeenkomsten van een hele dag te organiseren. Ik kon dit jaar twee van die bijeenkomsten meemaken.
E Wat zijn nu de kriteria voor de ordening van de leerstof?
K Van Dormolen behandelt het OSAEV-model, dat is: *o*riënteren, *s*orteren, *a*bstractie, *e*xipliciteren, *v*erwerken.
E Hebt u er in uw praktijk ook iets aan gehad?
K Jazeker, ik heb mijn lessen volgens dit systeem ingedeeld en ik meen dat de lessen toen veel fijner verliepen.
E Kunt u dit aan een voorbeeld toelichten?
K Ik heb o.a. ook de les gegeven die Van Dormolen bespreekt. Het doel van de les was het kennen en formuleren van de stelling: 'Voor elk geheel positief getal n en voor elk negatief getal a geldt: als n oneven is, dan is a^n een negatief getal en als n even is, dan is a^n een positief getal'. Voorbeelden van deze stelling kunnen geven. De kinderen behoeven deze stelling niet letterlijk te geven. Ze mogen het met eigen woorden doen.
Ik heb dit, net als Van Dormolen, in een brugklas gedaan. In de oriënteringsfase hebben we bekende leerstof herhaald. Dit is het oproepen van relevante voor-

kennis. Van Dormolen begint met 8^1. Dat heb ik niet gedaan omdat 8^1 geen eigenlijke macht is. Ik ben begonnen met 3^2. Niet met 2^2 omdat dit kans op 'ruis' geeft met 2 maal 2. Zo hebben we enige machten berekend en aan het eind ook 8^1 en 1^8. De nulde macht heb ik met opzet weggelaten. Ook machten van breuken heb ik niet gedaan. Dat doet Van Dormolen wel, maar ik vond dat een bijkomstige moeilijkheid.
Daarna kwam $(-3)^2$. Wat betekent dit? Kun je het antwoord vinden? Ook hier begin ik niet met $(-8)^1$ zoals Van Dormolen doet. Ik merkte dat mijn leerlingen een eerste macht moeilijker vinden dan een tweede of derde macht. Daarna ging ik over tot de sorteerfase. Ik liet de leerlingen machten rubriceren op de volgende manier:
Positief: $(-3)^2 = 9; (-3)^4 = 81; (-3)^0 = 1$.
Negatief: $(-3)^3 = -27; (-3)^5 = -243; (-3)^1 = -3$.
Zo ook machten van -2, van -1 en twee non-voorbeelden, machten van 2 en van 1.
E Hoe bleek of de leerlingen tot abstractie waren gekomen?
K De leerlingen moesten antwoord geven op vragen: hoeveel is $(-1)^{758}$, $(-1)^{243}$, 1^{243}, $(-1)^{27569}$ en: wat is het teken van $(-2)^{77}$ en dergelijke. Daarna kwamen nog de expliciteringsfase en de verwerkingsfase. Ik ben erg ingenomen met deze aanpak. Het stroomlijnt je lessen.
E In punt C1 staat: Kennis van en inzicht in het leerplan en een leergang voor wiskunde-onderwijs op een der schooltypen waarvoor de akte wiskunde l.o. onderwijsbevoegdheid geeft. Hoe hebt u zich op dit onderdeel voorbereid?
K Ik heb het Interimrapport met toegevoegde discussienota's van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde bestudeerd, in het bijzonder de discussienota's Brugjaar en Mavo.
E Vertelt u eens wat er over het brugjaar geschreven wordt.
K In het brugjaar komen de volgende onderwerpen ter sprake: verzamelingen, algebra en meetkunde. In de Schotse methode heeft de oude uitgave ook een afdeling rekenen, in de nieuwe uitgave zijn deze onderwerpen door elkaar verweven.
E Wat behandelt u in het brugjaar zoal van de algebra?
K Onder andere het werken met negatieve getallen. Moeilijk is het vermenigvuldigen van en met negatieve getallen.
E Hoe behandelt u dat met uw leerlingen?
K Ik werk aanvankelijk alleen met gehele getallen. Het vermenigvuldigen van positieve getallen wordt herhaald. Er wordt vooral onder woorden gebracht wat vermenigvuldigen is: een herhaald optellen. Dan volgen opgaven zoals: $3 \times (-4) = (-4)+(-4)+(-4) = -12$. Om de commutatieve eigenschap te laten doorgaan definiëren we $(-4) \times 3$ als $3 \times (-4)$. De leerlingen ontdekken dan en expliciteren dat vermenigvuldigen met een negatief getal gevonden kan worden door te vermenigvuldigen met een positief getal en het antwoord tegengesteld te nemen: $(-3) \times (-5) = -(3 \times (-5)) = -(-15) = 15$. Daarna leren we de regel: het produkt van twee negatieve getallen is positief. Kortweg zeggen we min maal min is plus.

E U hebt o.m. bestudeerd uit 'Wansink', deel I, het hoofdstuk 'Dril en inzicht'. Wat bent u daar tegengekomen over 'dril'?
K Dril kan en mag niet vermeden worden als het er om gaat bepaalde vaardigheden aan te leren. Wansink citeert in dit verband Van Hiele: werken met breuken, oplosmethoden bij vergelijkingen, eigenschappen van machten, rekenen met wortelvormen.
E Worden er ook nadelen van dril genoemd?
K Het gevaar van te veel dril is, dat de leerling zich in de steek gelaten voelt als hij iets zelf moet onderzoeken.
E Wat is eigenlijk 'inzicht'?
K Ik weet dat niet zo precies. Karl Bühler spreekt van een 'Aha-Erlebnis'. Het is iets wat je overvalt. Van Parreren gebruikt dierproeven van Köhler om aan te tonen dat inzicht een soort overlevingskans is in volkomen nieuwe situaties.
E Maar er vallen toch geen doden als je het wiskundig laat afweten?
K Natuurlijk niet, maar je staat wel gauw met je mond vol tanden als je alleen maar merkwaardige produkten uit je hoofd kent.
E Hebt u wel eens gehoord van inzicht-bevorderende lesmethoden?
K Herbart noemt een vijftal leertrappen. Van Hiele onderscheidt vijf denkniveau's: deze moeten in een serie opvolgende lessen allemaal aan bod komen. Hij licht dit toe aan de studie van de ruit.
E Welke lesmethoden noemt Wansink?
K Doceermethode, socratische methode, zelfwerkzaamheidsmethode, exemplarische methode, geprogrammeerde instructie.
Ik heb zelf geen leservaring bij het voortgezet onderwijs, maar ik stel het meeste vertrouwen in de heuristische methode; dat is wel een luxe, want de groep is vaak te groot om iedereen aan bod te laten komen.

E In de door u bestudeerde leergangen staan twee wiskundige begrippen centraal. Welke zijn dat?
K De verzamelingen en de relaties.
E Inderdaad. Hebt u enig idee waarom?
K Hierdoor is het mogelijk die akelige scheiding tussen algebra en meetkunde van meet af aan te voorkomen.
E U kent het 'vak' Analytische meetkunde?
K Natuurlijk.
E Dat is toch een fraai mengprodukt uit de oude school? Waarom dan toch al die nieuwigheden?
K Analytische meetkunde was alleen toegankelijk voor HBS- en gymnasiumleerlingen. De overgrote meerderheid van de leerlingen bleef verstoken van het besef, dat wiskunde ondeelbaar is. Het enige verschil dat blijft is de verzameling waarin je werkt. Zo vind ik het prachtig dat de samenstelling van afbeeldingen centraal staat en niet het feit, dat je dat op maandag en woensdag alleen mag doen in getalverzamelingen en op dinsdag en vrijdag alleen in puntverzamelingen. Een open bewering als $a + b = 0$ kan nu bekeken worden in verschillende verzamelingen: zowel in de verzameling van de gehele getallen bijvoorbeeld als in de

verzameling van de vectoren.
E Welke onderwijskundige principes hebt u ontdekt in de door u bestudeerde leergangen?
K In 'Moderne wiskunde' en in 'Van A tot Z': een concentrische leergang; bij ieder nieuw onderwerp wordt uitgegaan van de intuïtieve voorkennis die elke leerling heeft. De mogelijkheid tot zelfstudie is bij beide leergangen aanwezig, al zal bij 'Van A tot Z' de leraar meer greep moeten houden op de groep als geheel. Een zeer groot verschil is dat bij 'Van A tot Z' al in de eerste lessen de begrippen functie en inverse functie worden ingevoerd en meteen ook operabel zijn bij het oplossen van vergelijkingen.
E U noemt in uw verslag ook enkele notatieproblemen. Wilt u dat eens toelichten?
K Dr. Wansink geeft in 'Didactische Oriëntatie', deel II, zijn bezwaren weer tegen de schrijfwijze $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$. Hij stelt voor de notatie $f\colon x \to 2x^2 + 3x + 2$ te gebruiken voor de functie en de andere te reserveren voor de functiewaarde. Dus f is het symbool voor functie en $f(x)$ het symbool voor functiewaarde.
Ook kan volgens dr. Wansink voor functie de schrijfwijze: $f\colon x \to f(x)$ gebruikt worden. De uitdrukking $y = 4x^2 + 3$ noemt hij een functionele relatie.
In 'Moderne wiskunde' vindt men de aanduiding $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ voor functie kennelijk toelaatbaar. In 'Van A tot Z' wordt steeds de schrijfwijze $f\colon x \to 2x^2 +$ $+ 3x + 2$ gebruikt.

Hoewel de meeste kandidaten er blijk van gaven de door hen vermelde literatuur te hebben bestudeerd waren er ook kandidaten, die slechts 'de klok hebben horen luiden', zoals uit het volgende zal blijken. De laatste kandidaat vermeldt eerlijk een van de oorzaken van zijn slechte resultaat, een verkeerde examenvoorbereiding die de commissie helaas meer heeft geconstateerd.

E U noemt 'Vijven en zessen' en dan hebt u speciaal het oog op studietoetsen. Wat is volgens De Groot een objectieve studietoets?
K Die is veel eerlijker.
E ? ?
K Een objectieve studietoets benadeelt de leerling niet.
E Geeft u eens een voorbeeld van een objectieve studietoets.
K De leraar mag geen strikvragen stellen, geen slimmigheidjes bedenken zoals: de wortels van $x^2 - x + 100 = 0$ zijn a) 1 en 2 b) 100 en 10 c) negatief d) positief.
E ? ?
K Ik geloof dat u mij niet begrijpt; wilt u een andere vraag stellen?
E Wat wilt u zo al 'meten' als u een leerling een toets afneemt?
K Met een schriftelijke overhoring of een mondelinge beurt of de leerlingen het huiswerk hebben gedaan en met een repetitie of zij er ook nog iets van hebben begrepen.
E En u gebruikt daarbij steeds een objectieve studietoets?
K Uiteraard!
E Geen slimmigheidjes dus van uw kant?

K Nooit!

E U vulde niets in op uw formulier bij de vraag naar bestudeerde didactische werkvormen.
K Ik heb het aan mijn leraar gevraagd maar die wist ook niet wat het betekende.
E Hebt u dit dan niet gelezen? (*E* wijst in de aan elke kandidaat toegezonden Toelichting punt C2 aan). Hier staat: Doceermethode, socratische methode, leergesprek, en nog meer.
K Dat heb ik òver het hoofd gezien.
E Wat is de doceermethode?
K De leerstof wordt in stukjes verdeeld. De leraar zorgt voor de juiste dosis.
E Kan er ook verband bestaan met het woord 'docent? '
K ? ?
E Hebt u wel voldoende tijd besteed aan de voorbereiding van dit examen?
K Ik heb eerst de cijfers van het schriftelijk examen afgewacht en toen bleek dat ik voor het mondeling op mocht komen heb ik de boeken van Wansink van een collega geleend en heb ik er hard aan gewerkt.
E Dat vind ik toch wel erg laat om met de studie voor dit onderdeel te beginnen.

Rectificatie

In het Verslag van de besprekingen over het vak wiskunde bij het h.a.v.o. en het v.w.o. in Euclides 49, staat op blz. 224, regel 11 en 12 v.o.:
Bovendien is het gewenst enige distantie aan te brengen tussen het leerplan m.a.v.o.-4 en het leerplan h.a.v.o. voor de klassen 2 en 3.
Hier moest staan:
Bovendien is het gewenst geen distantie aan te brengen tussen het leerplan m.a.v.o.-4 en het leerplan h.a.v.o. voor de klassen 2 en 3.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Achterstallige contributie
Het gironummer 143917 t.n.v. Ned. Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam staat nog steeds open voor de betaling van de contributie van *f* 20,– over het lopende verenigingsjaar. De penningmeester vraagt u om binnen een week na verschijnen van dit blad uw contributieschuld te delgen. Daarna zult u persoonlijk benaderd worden, maar dan wordt het bedrag wel met incassokosten verhoogd.

Verslag besprekingen examens wiskunde mavo 1973

In de maand september zijn er door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren weer bijeenkomsten georganiseerd om de examens wiskunde mavo 1973 te bespreken. De in totaal 11 bijeenkomsten, die gehouden werden in 11 verschillende, over het gehele land verspreide, plaatsen, werden bezocht door ongeveer 250 leraren; zowel leden als niet-leden waren welkom. Het lijkt zinvol het aantal vergaderingen in de toekomst te beperken.
Hieronder volgt een samenvatting van de belangrijkste punten uit de elf verslagen.

I INLEIDING

Ingevolge een Kon. Besluit berust de verantwoordelijkheid voor het vaststellen van de uiteindelijke opgaven bij de Commissie Vaststelling Opgaven, waarin vertegenwoordigd zijn: de inspectie, de A.V.S. en het mavo-verband.
Voor wat betreft de open vraagstukken heeft de C.V.O. de steun van adviescommissies, die een aantal series vraagstukken samenstellen, voor het examen en de herexamens, uit de door een anonieme groep leraren ingezonden opgaven. Deze adviescommissie is eveneens anoniem.
Het meerkeuze-werk wordt samengesteld door een Cito-schrijfgroep, maar natuurlijk weer vastgesteld door de C.V.O. De opgaven hebben in het algemeen goede reacties teweeg gebracht.

II NORMERING

Ook de normering werd aanvankelijk door het overgrote deel der betrokken leraren goed ontvangen. Totdat onder druk van een, naar het zich laat aan-

zien, kleine actiegroep een hernormering op het open werk voor mavo-4 werd toegepast.
Het merendeel van de collega's, die de elf vergaderingen bezochten, waren tegen, zo niet fel tegen deze hernormering.
Argumenten van tegenstanders van de hernormering waren:

a Het niveau van de mavo-examens moet bewaard blijven, anders verliest het mavo-diploma maar al te snel zijn waarde en daar is niemand mee gediend.
b Het lijkt op bedrog tegenover de 'buitenwereld' als een betrekkelijk zwaar examen van een soepele normering vergezeld gaat.
c Het schoolonderzoek en de meerkeuzetoets bieden voldoende tegenwicht om grote ongelukken te voorkomen. De cesuur bij het meerkeuze-werk wordt pas gelegd, als de gehele of nagenoeg gehele landelijke uitslag bekend is. In het ergste geval had deze cesuur nog verlegd kunnen worden.
d Merkwaardig dat protest zich richt tegen de normering en niet tegen de opgaven zelf.

Zoals uit nevenstaand staatje blijkt, behaalde iemand die van alle vraagstukken alleen het a-gedeelte goed had, wat toch beslist niet voldoende is, 31 punten. Iemand die dan ook nog alle b-vragen heeft, krijgt 60 punten, dat is het cijfer 6.
Bij mavo III was dat ook zo: alleen a goed, dan ! 29 punten, ook nog b goed, dan 55 punten, dus cijfer 6.
Deze resultaten zijn niet toevallig zo.

mavo-4

opgave nr	punten per onderdeel				punten per opgave
	a	b	c	d	
1	7	7	6	–	20
2	7	7	6	–	20
3	5	5	4	6	20
4	5	4	5	6	20
5	7	6	7	–	20
Totaal	31	29	28	12	100

mavo-3

opgave nr	punten per onderdeel					punten per opgave
	a	b	c	d	e	
1	8	6	6	5	–	25
2	4	6	6	3	6	25
3	9	8	8	–	–	25
4	8	6	7	4	–	25
Totaal	29	26	27	12	6	100

Argumenten voor herwaardering:

a De tijd was te krap.
b Iemand had de leerlingen geselecteerd m.b.v. het examen 1972. Het onderhavige examen werd moeilijker gevonden.

Tot de invoering van het '100-punten-systeem' is besloten door de C.V.O. Het werd door de meeste docenten toegejuicht. Meningsverschillen tussen 1e en 2e corrector vloeiden vaak voort uit een verschillende interpretatie van het toe te kennen aantal punten per onderdeel.
De normering was te summier. Een gedetailleerdere (bindende) normering wordt door iedereen toegejuicht.

De normering van de meerkeuzetoetsen geschiedt zoals opgemerkt aan de hand van de landelijke, door de computer bepaalde, gemiddelde score. Voornormering bij dit soort vraagstukken is niet wenselijk, omdat de moeilijkheidsgraad ervan niet zo gemakkelijk te testen is. Het zou wenselijk zijn als uit een groot arsenaal vragen, die van te voren op moeilijkheid getest waren, geput kon worden. Maar dat staat de wet niet toe.
Door enkelen werd voorgesteld in de meerkeuzetoets een aantal gemakkelijke items op te nemen, zodat de gemiddelde score stijgt. Een gemiddelde van 17 vond men aan de lage kant.

III NIVEAU

De mening heerst, dat het examen een niveaubewakende functie moet hebben. Deze functie wordt min of meer aangetast door het achteraf leggen van de cesuur bij de meerkeuzetoetsen.
Meer leerlingen kiezen wiskunde: vorig jaar 43%, dit jaar 45%.
We willen naar aanleiding van deze percentages hopen dat de aanleg groeiende is, maar wagen dit vooralsnog te betwijfelen. Misschien dat de aantrekkelijke wijze van het wiskunde-begin-onderwijs dit beter verklaart. Het feit dat, vergeleken met 1960, nu minder kinderen naar het mavo gaan en meer naar het vwo/havo wettigt de veronderstelling dat het niveau dalende is.
In dit verband stelt een aantal leraren, dat de school een duidelijke drempel moet hanteren bij de overgang van klas 3 naar klas 4 met betrekking tot het kiezen van wiskunde. Er zijn echter ook scholen waar men vindt dat een leerling i.v.m. de toelaatbaarheid bij het vervolgonderwijs, beter een mavo-diploma met een onvoldoende voor wiskunde op het cijferlijstje kan hebben dan een mavo-diploma zonder wiskunde.
Misschien moet het teruglopen van het aantal mavo-3 leerlingen, dat de laatste jaren geconstateerd wordt, geweten worden aan het verlagen van het niveau, een tendens waaraan de wiskunde-adviescommissie en de C.V.O. tot nu toe niet toegegeven heeft.

IV NOMENCLATUUR

Toen de examenopgaven wiskunde 1973 moesten worden vastgesteld, was het eindrapport van de Nomenclatuurcommissie nog niet bekend. Bij het vaststellen van de volgende examens zal de C.V.O. zich houden aan de in dit rapport vastgestelde notaties. Mochten er toch nog afwijkingen voorkomen, dan zullen die per circulaire onder ieders aandacht worden gebracht.
Op een klacht, dat kinderen uit taalarme milieus ongedachte moeilijkheden hebben met de in de examens gebruikte taal, werd geantwoord dat dit niet zo zeer een probleem van het examen dan wel van het onderwijs is. Er moet in die gevallen eerder begonnen worden met het gebruik van deze taal.

Hoewel een goede notatie gewenst is, is het duidelijk dat het kunnen oplossen van een vraagstuk zwaarder moet wegen dan het goed kunnen noteren van de oplossing. Van verschillende zijden werd er op aangedrongen, bij het meerkeuzewerk zoveel mogelijk tekeningen te geven, omdat dit de leerlingen veel tijd bespaart en het werk sterk verduidelijkt.

V DIVERSE OPMERKINGEN, VRAGEN EN ANTWOORDEN

Waarom wordt het meerkeuzewerk door de computer nagekeken? Antwoord: De computer haalt behalve het cijfer nog andere gegevens uit het werk. Wel moeten de antwoordbladen nog door de leraar nagekeken worden. Een niet helemaal vlekkeloos uitgestuft streepje b.v. kan een fout veroorzaken.
Op verschillende bijeenkomsten werd gevraagd naar oefenmateriaal. Langzamerhand komt er steeds meer oefenstof door de reeds gehouden examens en herexamens. Als het oefenen maar niet ontaardt in drillen.
Het examen 1973 is meer representatief voor het niveau dan dat van 1972.
Er rijst hier en daar misverstand over de vraag of het gebruik van de rekenliniaal verplicht gesteld zal worden of dat ook tabellen gebruikt mogen worden bij de toekomstige examens.
Het officiële standpunt is, dat beide toegestaan zijn, maar dat de rekenlineaal de voorkeur verdient.
De volgende suggesties werden gedaan:
1 Pijltjes notatie voor vectoren handhaven.
2 Verslag van deze bijeenkomsten in Euclides.
3 Bijeenkomsten tot het bespreken van didaktische problemen en wat daarmee samenhangt, zijn zinvoller dan . . .
4 voorcorrectie alvorens bindende normen naar scholen worden gestuurd.
5 Plaats wiskunde I, wiskunde II en natuurkunde niet steeds op de laatste dagen van het centraal schriftelijk examen. Dit in verband met de zwaarte van deze vakken en de mogelijkheid van examen-moeheid.
6 Uniform papier voorschrijven.

VI BESPREKING EXAMENS

I Mavo III

Meerkeuze-werk:
opgave 5: waarom niet gewoon: $y = (x - 1)^2 + 1$?
opgave 21: vergelijking van de cirkel behoort niet tot de examenstof mavo III, maar de stelling van Pythagoras wel en die was voldoende voor de oplossing.
opgave 23: liever $f: x \rightarrow 4x$ enz.
Open vraagstukken:
opgave 2: valt onderdeel e buiten het programma?

Er staat niet: 'Los op', maar: 'Lees . . . af'.
opgave 4: wordt uitgelegd als selectieopgave. Bij onderdeel c en d is het: alles goed of alles fout.

II Mavo IV

Meerkeuzewerk:
opgave 1: te eenvoudig? Mag wel, is aanloopvraagstuk.
opgave 2: volgens enkelen was deze opgave niet goed omdat in feite twee berekeningen moesten worden uitgevoerd. Had men de zijde goed, dan kon men nog een fout maken in de oppervlakte en dan had men het hele vraagstuk fout, terwijl men in feite de helft goed had gedaan. Hier staat tegenover, dat sommige vraagstukken zo eenvoudig zijn, dat men ze praktisch niet fout kán maken. Bovendien gaat men ervan uit dat de leerlingen een zekere rekenvaardigheid moeten hebben. Tenslotte zijn er opgaven, waarbij men van het antwoord uit kan gaan om de goede oplossing te vinden.
opgave 6: de opmerking werd gemaakt, dat men deze opgave beter in tabelvorm had kunnen geven. Dit bleek oorspronkelijk het geval te zijn geweest, maar er moest zo'n lange redactie aan voorafgaan, dat daardoor het vraagstuk veel onduidelijker werd.
opgave 12: naar aanleiding van dit vraagstuk werd gevraagd of opgaven als deze, die veel rekenwerk vergen, als laatste geplaatst kunnen worden.
opgave 13: notatie leverde soms moeilijkheden op.
opgave 23: het kleine aantal goede oplossingen is misschien te wijten aan onvoldoende behandeling in de leerboeken?
opgave 29: welke oplossingsmethode? $x^2 + (px — 2) = 5$ is geen mavostof.
Open vraagstukken:
opgave 1: deze opgave heeft nogal wat kritiek ondervonden. Men vond hem te gemakkelijk, alhoewel dat eigenlijk te wijten is aan het examenprogramma. Sommigen zouden graag zien dat dat wat uitgediept werd. Anderen zijn er voorstander van de statistiek niet meer op het schriftelijk examen aan de orde te laten komen. Voorts was er enige kritiek op de redactie, met betrekking tot het afronden op tientallen. Leerlingen plegen slecht te lezen. Antwoorden stonden soms in enkele decimalen.
Eigenlijk wordt drie keer hetzelfde gevraagd; logisch dat een goede leerling er wat meer achter gaat zoeken, er dan te veel tijd aan besteedt en in tijdnood komt.
opgave 2: er waren leerlingen, die niet aan een berekening toekwamen, omdat ze geen goede tekening konden maken. Er werd meer stereometrisch inzicht gevraagd dan vorig jaar in vergelijkbare vraagstukken. Zet deze tendens zich voort? vroeg men zich af. Volgens de inspectie behoeft niet voor nog moeilijkere stereometrie-opgaven te worden gevreesd.
opgave 3: is beslist geen stapelsom, zoals door enkelen werd beweerd, want bij

b mag het gegeven van *a* worden gebruikt. Uniforme notatie in leerboeken gewenst. Door sommigen werd de vraagstelling niet nauwkeurig genoeg gevonden. Bij de normering werd geen rekening gehouden met het feit, dat de hele opgave afhing van het kiezen van het juiste domein. Bij de herziene normering ging hier maar een fraktie van het aantal punten van af.
opgave 4: er werd kritiek geuit op het feit dat bij de herziene normering, in $\mathbb{Z}^+$ het element 0 mocht meetellen. Voorts werd er beweerd dat dit een stapelopgave was: wie de cirkel niet kan tekenen, komt niet verder. Bij onnauwkeurig tekenen worden enige punten dubieus.
opgave 5: als er in de opgave staat: bereken, dan dient er ook inderdaad gerekend te worden; men is tegen het toekennen van een relatief groot aantal punten, als het antwoord alleen maar afgelezen is. Verder wordt opgemerkt, dat het verwarrend werkt, als er berekend moet worden terwijl het antwoord gemakkelijk is af te lezen. Wil men kennis van vectormeetkunde toetsen, dan duidelijk vermelden: met behulp van vectoren.

L. Bozua

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

XCI Evenwicht door beweging.

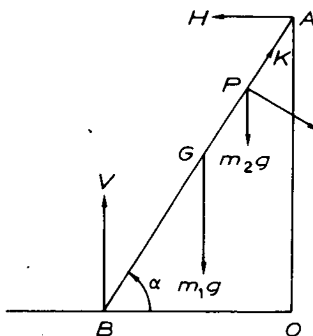


fig. 1

Een homogene paal AB met zwaartepunt G, massa m, en lengte $2l$ steunt in A tegen een gladde muur en in B op een gladde vloer en wel zó dat AB de plint loodrecht kruist (fig. 1).
Als zij onderworpen is aan de zwaartekracht (met versnelling g) en de hoek α maakt met BO ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) kan zij niet in evenwicht zijn. De beweging van AB is indertijd in deze rubriek aan de orde geweest. (De ladder tegen de muur, Verscheidenheden XXX, Euclides 26, 1950-51, 256-259.)

In de klassieke verzameling mechanica-vraagstukken van W a l t o n[1] wordt de volgende situatie beschouwd. In A is een aap geposteerd, die langs de paal naar beneden klautert. De vraag luidt: zou dat op een zodanige wijze kunnen gebeuren dat de paal in evenwicht blijft? Het verrassende antwoord luidt bevestigend.
Wij veroorloven ons hier op het probleem terug te komen; de behandeling bij Walton is erg onvolledig omdat met name de wijze waarop het afdalen moet plaats vinden niet wordt aangegeven.
Het vraagstuk is door hem ondergebracht in de afdeling *Life things,* die men wel tot de *mécanique amusante* kan rekenen voorzover de problemen met behulp van beelden uit het dierenrijk worden geformuleerd; behalve apen ontmoet men vliegen, wespen en muizen, ja zelfs *fleas* en *earwigs.* De stylering van deze fauna is ver doorgevoerd: elk dier wordt met behoud van een enkele kenmerkende fysieke eigenschap tot een stoffelijk punt gereduceerd. Onze aap P hebbe de massa m_2 en

1. W. W a l t o n , A collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics; third edition (Cambridge, 1876), p. 632-633.

bevinde zich op het tijdstip t in een punt van AB zo dat $AP = (t)$; voor $t = 0$ is $u = \dot{u} = 0$. P heeft de mogelijkheid op AB een kracht uit te oefenen; de komponent in de richting BA noemen wij K, die loodrecht op AB neerwaarts naar rechts is N. De paal oefent dan op P een tegengesteld gerichte even grote kracht uit. De bewegingsvergelijkingen voor P zijn dus

$$m_2\ddot{u} = K + m_2\, g \sin\alpha, \tag{1}$$

$$0 = N - m_2\, g \cos\alpha. \tag{2}$$

Op de paal werken behalve K en N het in G aangrijpend gewicht $m_1 g$ en de reactiekrachten H en V van de muur en de vloer ($H \geqslant 0$, $V \geqslant 0$). AB is in evenwicht als drie voorwaarden vervuld zijn. De som der horizontale en die der vertikale komponenten van de op AB werkende krachten moet nul zijn, alsmede de som der momenten dezer krachten t.o.v. zeker punt, zeg A. Dat geeft

$$-H + K\cos\alpha + N\sin\alpha = 0, \tag{3}$$

$$V - m_1 g + K\sin\alpha - N\cos\alpha = 0, \tag{4}$$

$$-Nu - m_1 g\, l\cos\alpha + 2Vl\cos\alpha = 0. \tag{5}$$

We vinden dus

$$K = m_2\ddot{u} - m_2 g\sin\alpha, \tag{6}$$

$$N = m_2 g\cos\alpha, \tag{7}$$

$$H = m_2\ddot{u}\cos\alpha, \tag{8}$$

$$V = -m_2\ddot{u}\sin\alpha + (m_1 + m_2)g, \tag{9}$$

en na substitutie in (5) de door Walton afgeleide differentiaalvergelijking:

$$\ddot{u} + \frac{g}{2\,l\sin\alpha}\,u = \frac{(m_1 + 2m_2)g}{2m_2\sin\alpha}. \tag{10}$$

De constante $\frac{m_1 + 2m_2}{m_2}\,l$ is een oplossing maar wegens $0 \leqslant u \leqslant 2l$ niet bruikbaar. De gereduceerde vergelijking is die ener harmonische beweging; de algemene oplossing van (10) luidt dus:

$$u = Q_1\cos\omega t + Q_2\sin\omega t + \frac{m_1 + 2m_2}{m_2}\,l, \tag{11}$$

met

$$\omega^2 = \frac{g}{2\,l\sin\alpha}, \tag{12}$$

De integratieconstanten Q_1 en Q_2 kunnen uit de begincondities bepaald worden en wij vinden voor *de noodzakelijke beweging van de aap*

$$u = \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} l(1 - \cos \omega t). \tag{13}$$

Met de afkorting $k = \dfrac{m_1 + 2m_2}{m_2}$ krijgen wij

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= k l \omega \sin \omega t,\\
\ddot{u} &= k l \omega^2 \cos \omega t,\\
K &= m_2 k l \omega^2 \cos \omega t - m_2 g \sin \alpha,\\
H &= m_2 k l \omega^2 \cos \alpha \cos \omega t,\\
V &= (m_1 + m_2) g - m_2 k l \omega^2 \sin \alpha \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{14}$$

Is P op het tijdstip t_1 in B dan is $u(t_1) = 2l$, waaruit volgt

$$\cos \omega t_1 = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}, \tag{15}$$

waarmee de duur der beweging is bepaald. Voor $0 \leqslant t \leqslant t_1$ neemt $\cos \omega t$ monotoon af van 1 tot de waarde (15). Zij is steeds positief. Ook H is dus inderdaad positief en wel afnemend van $\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)g \cot \alpha$ tot $\frac{1}{2} m_1 g \cot \alpha$. De reactiekracht V neemt toe van $\frac{1}{2} m_1 g$ in het begin tot $\frac{1}{2} m_1 g + m_2 g$ aan het eind.
De beweging van P is versneld, maar met een afnemende versnelling.

$$\ddot{u}_0 = \frac{m_1 + 2m_2}{2m_2} \cdot \frac{g}{\sin \alpha}, \qquad \ddot{u}_1 = \frac{m_1}{2m_2} \cdot \frac{g}{\sin \alpha}. \tag{16}$$

De beginversnelling is zeker groter dan $g \sin \alpha$ en K_0 derhalve positief, dus naar boven gericht; de activiteit van de aap is dan zodanig dat hij sneller gaat dan ten gevolge van de eigen zwaarte. Is ook $\ddot{u}_1 \geqslant g \sin \alpha$, dus $m_1 \geqslant 2m_2 \sin^2 \alpha$, dan is dat gedurende de gehele beweging het geval. Wanneer echter $m_1 < 2m_2 \sin^2 \alpha$ dan wordt onderweg $K = 0$ en daarna negatief: de aap moet dan verder het natuurlijke glijden langs de paal afremmen. Deze eventuele omslag heeft plaats op het tijdstip t_2 waarvoor $\cos \omega t_2 = \dfrac{2m_2 \sin^2 \alpha}{m_1 + 2m_2}$ en in het punt $u_2 = \dfrac{m_1 + 2m_2 \cos^2 \alpha}{m_2} l$; de conditie $m_1 \leqslant 2m_2 \sin^2 \alpha$ waarborgt dat $t_2 \leqslant t_1$ en $u_2 \leqslant 2l$.
Hoewel de aap zich moet inspannen en op zijn quivive zijn, verricht hij geen arbeid in de zin der mechanica. Dat is wel het geval met de door de paal op de aap uitgeoefende kracht. Die arbeid is òf tijdens de gehele beweging positief òf positief tot het omslagpunt en negatief daarna. De totale arbeid kan blijken uit de kinetische energie van P bij aankomst in B. Die is:

$$T = \tfrac{1}{2} m_2 \dot{u}_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 k^2 l^2 \omega^2 \sin^2 \omega t_1 = \frac{(m_1 + m_2) g l}{\sin \alpha}.$$

Het aandeel van de zwaartekracht daarin is $T_1 = 2m_2 g\, l \sin \alpha$ en dat van K dus $T_2 = \dfrac{g\, l}{\sin \alpha}(m_1 + m_2 \cos 2\alpha)$, wat positief, maar ook wel nul of negatief kan zijn.
Men kan het vraagstuk variëren door andere beginvoorwaarden te kiezen. Zo kan men P van B uit naar boven laten gaan tot G en dan naar B terug. In (11) is dan

$$Q_1 = -\frac{m_1}{m_2}\, l,\ Q_2 = -\left(\frac{2m_1 + m_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} l.$$

De duur τ van de opwaartse (en van de neergaande) beweging volgt uit $\cos \omega \tau = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$; de begin- en de eindsnelheid in B zijn ωQ_2.

Mededeling aan de abonnees op Mathematica & Paedagogia

De abonnees op Mathematica & Paedagogia hebben ontvangen:
a. van de nederlandstalige uitgave nr. 61;
b. van de franstalige uitgave nr. 63.
Bij informatie is mij het volgende gebleken. De nederlandstalige en de franstalige uitgave hebben niet dezelfde inhoud.
Aan de nederlandstalige abonnees wordt de nederlandstalige uitgave gezonden. *Indien ze er prijs op stellen kunnen ze bovendien de franstalige uitgave toegezonden krijgen zonder prijsverhoging.*
Willen degenen die prijs stellen op het ontvangen van de beide uitgaven mij dit per omgaande meedelen (binnen veertien dagen na het verschijnen van dit nummer)? Ik zal hun verzoek dan doorgeven aan de penningmeester van onze belgische zustervereniging.
(Nr. 62 nederlandstalig moet nog verschijnen.)

P.G.J. Vredenduin
Dillenburg 148
Doorwerth

Korrel

Het metrieke stelsel in Engeland

De besluiten tot invoering van het metrieke stelsel in Engeland zullen ook voor het Engelse wiskunde-onderwijs verstrekkende gevolgen hebben. Het bewerkelijke Engelse stelsel van maten en gewichten bracht immers mee dat er zeer veel uren in het voortgezet onderwijs moeten worden opgeofferd aan een rekentechniek, terwijl deze uren straks vrij beloven te komen voor een op inzicht gericht wiskunde-onderwijs.
De strijd tegen het metriek stelsel is oud.
In een artikel in *Normalisatie* van november 1953 heeft ir. J.D. Tours gewezen op de strijd van W.J.M. Rankine († 1872), werktuigkundige en hoogleraar te Glasgow, van wiens hand het volgende spotdicht is, gericht tegen hen die te zeer aan het traditionele stelsel waren verknocht.

When I was bound apprentice, and learned to use my hands,
Folk never talked of measures that came from foreign lands.
Now I'm a British Workman, too old to go to school;
So whether the chisel or file I hold, I'll stick to my three-foot rule.

Some talk of millimetres, and some of kilogrammes,
And some of decilitres to measure beer and drams;
But I'm a British Workman, too old to go to school;
So by pounds I'll eat, and by quarts I'll drink, and I'll work by my three-foot rule.

A party of astronomers went measuring of the earth,
And forty million metres they took to be it's girth;
Five hundred million inches, though, go through from pole to pole;
So let us stick to inches, feet and yards, and the good old three-foot rule.

The great Egyptian pyramid's a thousand yards about;
And when the masons finished it, they raised a joyful shout;
The chap that planned that building, I'm bound he was no fool;
And now 't is proved beyond a doubt, he used a three-foot rule.

Here's a health to every learned man that goes by common sense,
And would not plague the workman on any vain pretence;
But as for those philanthropists who'd send us back to school,
Oh, bless their eyes, if ever they tries to put down the three-foot rule.

Joh. H. Wansink
Arnhem

Verslag van de 15de Internationale Wiskunde Olympiade

Moskou, 4 tot 17 juli 1973

Organisatie

Door een tot nu toe nog niet opgehelderde oorzaak is er geen officiële uitnodiging voor deze Olympiade ontvangen door het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. Particulier initiatief (onder andere van één van de ouders van de deelnemers) had tot gevolg, dat onze ambassade in Moskou in staat was een niet-officiële uitnodiging naar Den Haag te telexen, waarna met voortreffelijke hulp van de afdeling Internationale Betrekkingen van ons Ministerie op het laatste nippertje nog een Nederlands team gezonden kon worden.
In Moskou bleek men voor het organiseren van deze Olympiade veel te weinig tijd beschikbaar gehad te hebben, zodat ook daar wel het een en ander haperde.

Selectie van het team

Evenals in vorige jaren ontvingen de deelnemers aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade een serietje 'lesbrieven', op grond waarvan de selectie plaats zou vinden. De respons daarop was numeriek gering, chronologisch traag en kwalitatief matig; wellicht is dat te wijten aan het feit dat de laatste klassieke leerlingengeneratie door de mammoet opgejaagd of al bijna weggejaagd is en dat er nog niet veel vwo-aanbod was dit jaar.
Ook door het uitblijven van een uitnodiging uit de Sovjet Unie konden geen bijeenkomsten met de jongelui belegd worden (voor volgend jaar staan er vier of vijf op het programma, terwijl ook geprobeerd wordt met de 'lesbrieven' wat strakker te opereren).
Uiteindelijk werd het volgende team gekozen (binnen de laatste twee weken voor de Olympiade):

J. van Gans	was	1	in de Nederlandse Olympiade
J.P.H.W. van den Eijnde		2	
F. Cornelis		3	
W.B.G. Ruitenburg		4	
F.G. Menting		5	
J.J. van de Bij		6	
W. van Viersen		7	
mej. J. Brinkhuis		9	

Als jurylid trad op A. van Tooren, als zijn plaatsvervanger dr. J. van der Craats (R.U. Leiden).

Resultaten

Uit de zes opgaven (zie bijlage) konden maximaal 40 punten gescoord worden per deelnemer. Een derde prijs werd verleend bij tenminste 17 punten, een tweede prijs bij tenminste 27 punten, een eerste prijs bij tenminste 35 punten.
Er waren vijf eerste prijzen: drie voor Russische deelnemers (met 40, 39, 39 punten), één voor een Hongaar (met 38 punten) en één voor een Engelsman (met 35 punten).
Er waren 17 tweede prijzen en 46 derde prijzen. Van de laatste gingen er twee naar Nederlanders: Van Gans (26 punten) en Van den Eijnde (20 punten).

De persoonlijke resultaten van de Nederlanders waren per vraagstuk

Van Gans	0	6	0	6	6	8	totaal 26
Van den Eijnde	2	6	0	6	6	0	20
Cornelis	1	6	0	5	0	0	12
Ruitenburg	6	6	0	3	0	0	15
Menting	0	4	1	4	5	0	14
Van de Bij	0	0	1	2	0	0	3
Van Viersen	0	0	0	1	0	0	1
Brinkhuis	0	5	0	0	0	0	5

Hier volgt ook het landenklassement (met ter vergelijking de totalen van vorig jaar tussen haakjes). Cuba had ook dit jaar weer een onvolledig team (vijf deelnemers, vorig jaar vier).

Sovjet Unie	35	41	53	47	48	30	254	(270)
Hongarije	34	31	50	44	45	11	209	(263)
D.D.R.	39	18	31	46	40	14	197	(239)
Polen	35	36	16	36	42	8	173	(160)
Engeland	17	30	38	30	24	24	163	(179)
Frankrijk	18	13	36	28	42	16	153	
Tsjechoslowakije	16	11	57	31	27	7	149	(131)
Oostenrijk	15	23	48	43	15	0	144	(136)
Roemenië	30	18	43	29	13	8	141	(208)
Joegoslavië	20	6	50	37	20	4	137	(136)
Zweden	14	12	14	28	21	10	99	(60)
Bulgarije	16	6	30	19	25	0	96	(120)
Nederland	9	33	2	27	17	8	96	(51)
Finland	5	31	16	17	17	0	86	
Mongolië	10	20	12	12	10	0	64	(48)
Cuba	9	6	3	11	13	0	42	(14)

Volgende Internationale Olympiade

In 1974 wordt de Olympiade in de D.D.R. georganiseerd (in Erfurt, Weimar en Berlijn, van 4 tot 16 juli). Een voorlopig programma is al voorhanden, zodat er wel niet zoveel organisatorische moeilijkheden zullen zijn als dit jaar.

A. van Tooren
J. van der Craats

I. Tsjechoslowakije (6 punten)

O is een punt van lijn g en $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \ldots, \vec{OP}_n$ zijn vectoren met de lengte 1, waarbij alle P_i in één vlak door g liggen en wel allemaal aan dezelfde kant van g. Bewijs dat voor oneven n geldt

$$|\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \ldots + \vec{OP}_n| \geqslant 1$$

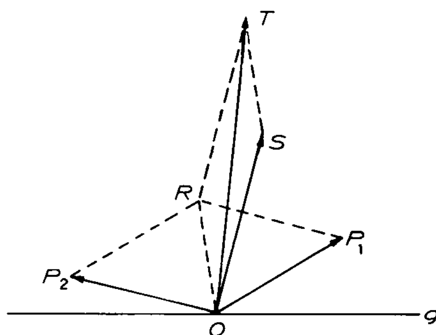
(waarin met $|\vec{XY}|$ de lengte van vector $\vec{XY}$ wordt bedoeld).

Voor $n = 1$ is het gestelde waar. Nu bewijzen we: als de bewering waar is voor m vectoren, dan is hij ook waar voor $m + 2$ vectoren. Daarna levert volledige inductie naar m het gewenste resultaat.
Die $m + 2$ vectoren nummeren we zo, dat $\vec{OP}_1$ en $\vec{OP}_2$ opvolgend maximale en minimale hoek maken met één van de door O op g bepaalde halve lijnen. Verder schrijven we $\vec{OS}$ voor $OP_3 + \ldots + OP_{m+2}$, zodat op grond van de inductieveronderstelling geldt $|\vec{OS}| \geqslant 1$. Verder ligt $\vec{OS}$ binnen hoek P_1OP_2.
Nu construeren we $\vec{OR} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ en $\vec{OT} = \vec{OR} + \vec{OS}$. Er moet dus bewezen worden $|\vec{OT}| \geqslant 1$. Omdat OS binnen hoek P_1OP_2 ligt, waarvan OR de deellijn is, geldt

$$0 \leqslant \angle ROS \leqslant \tfrac{1}{2} \angle P_1OP_2 < \tfrac{1}{2}\pi$$

In de eventueel ontaarde driehoek OST is nu hoek OST de grootste hoek en dus OT de langste zijde, want $\frac{1}{2}\pi < \angle OST = \pi - \angle ROS \leqslant \pi$. Daarom is $OT > OS \geqslant 1$.

Gemiddelde score	20,9 punten	(per volledig team)
spreiding	10,5 punten	
onze score	9 punten	(14[de] plaats)



II Polen (6 punten)

Bestaat er wel of niet een eindige (niet-lege) verzameling M van niet in één vlak gelegen punten, die de volgende eigenschap heeft:

> bij elk tweetal verschillende punten A en B uit M is er een tweetal verschillende punten C en D in M te vinden zo, dat de lijnen AB en CD evenwijdig zijn (zonder samen te vallen)?

Laat M de uit 10 punten bestaande figuur zijn, gevormd door de acht hoekpunten van kubus $ABCD$. $EFGH$ en de spiegelbeelden P en Q van het middelpunt O van die kubus in de vlakken $ABCD$ en $EFGH$.
Deze figuur M is puntsymmetrisch ten opzichte van O. Daarom is elke niet door O gaande verbindingslijn van twee punten uit M evenwijdig met de verbindingslijn van de twee spiegelbeelden van die punten ten opzichte van O (die ook tot M behoren!). De wel door O gaande verbindingslijnen XY zijn de vier lichaamsdiagonalen van de kubus; zij zijn evenwijdig met de verbindingslijnen van P met de punt A, B, C en D.

In 'onze' oplossingen was vooral een ander voorbeeld te vinden van een figuur M, die de genoemde eigenschap heeft: de uit 26 punten bestaande figuur, gevormd door de acht hoekpunten van een kubus, de zes middelpunten van diens zijvlakken en de 12 middens van diens ribben.

Gemiddelde score	21,9 punten
spreiding	8,0 punten
onze score	33 punten (3de plaats)

Zou het toch waar zijn dat het stereometrie-onderwijs, zoals wij dat hadden, een goed ruimtelijk inzicht aankweekte? ? ?

III. Zweden (8 punten)

a en b zijn zodanig reële getallen, dat de vergelijking

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

ten minste één reële wortel heeft. Bereken de minimale waarde van $a^2 + b^2$.

Voor elke reële $x \neq 0$ interpreteren we de gegeven vergelijking als die van een rechte lijn in het (a, b)-vlak. Dan stelt $a^2 + b^2$ het kwadraat van de afstand van de oorsprong tot die lijn voor en en dit bedraagt

$$f(x) = x^{-2}(x^4 + 1)^2 (x^4 + 3x^2 + 1)^{-1}$$

Met behulp van de afgeleide functie is gemakkelijk te berekenen dat het gevraagde minimum is $f(-1) = f(1) = \frac{4}{5}$.

Omdat in veel landen wederkerige vergelijkingen op het programma staan, vonden veel deelnemers een oplossing waarin via de substitutie van y voor $x + \frac{1}{x}$ reductie tot een tweedegraadsvergelijking werd verkregen.

Gemiddelde score	33,1 punten
spreiding	16,9 punten
onze score	2 punten (15de plaats)

IV Joegoslavië (6 punten)

Een soldaat moet controleren, dat er zich geen landmijnen bevinden binnen de gelijkzijdige driehoek *ABC* of op de omtrek daarvan. De reikwijdte van zijn mijndetector is gelijk aan de helft van de lengte van de hoogtelijn van driehoek *ABC*. Hij begint in een hoekpunt.
Welke weg moet hij kiezen om de kortst mogelijke afstand af te leggen van dat hoekpunt tot het punt, waar hij de controle beëindigd?

Stel, dat hij in A begint. Zijn weg zal een punt P moeten bevatten van cirkel (C, r) en een punt Q van cirkel (B, r); hierin is r de reikwijdte van de detector. We nemen aan dat hij eerst P bereikt en dan Q; dat mag op grond van de symmetrie van de figuur.
We nemen P variabel op cirkel (C, r). De kortste weg van A naar een P is het lijnstuk AP. De kortste weg van P naar een Q is deel van het lijnstuk PB. We zoeken de P, waarvoor $AP + PQ$ minimaal is. Dit is tevens de P, waarvoor $AP + PB$ minimaal is.
Deze P is het midden M van de hoogtelijn uit C; de bijbehorende Q noemen we N. Want alle andere punten van cirkel (C, r) liggen buiten de ellips door M met brandpunten in A en B, zodat voor hen $AP + PB > AM + MB$.
Wanneer nu nog aangetoond wordt dat bij het volgen van de lijnstukken AM en MN elk punt van het te controleren gebied binnen het bereik van de detector komt te liggen, dan is daarmee het antwoord gevonden! Dat bewijs is gemakkelijk te geven.

Gemiddelde score	31,6 punten
spreiding	10,6 punten
onze score	27 punten (12de plaats)

V Polen (6 punten)

G is een niet-lege verzameling van functies van de vorm $f(x) = ax + b$ met constante reële $a \neq 0$ en constante reële b, en waarin x een reële variabele is. Van G is het volgende gegeven:
- bij elke $f(x) = ax + b$ in G is er tenminste één x, die aan $f(x) = x$ voldoet;
- als de functies $f_1(x) = a_1x + b_1$ en $f_2(x) = a_1x + b_2$ tot G behoren, dan behoort ook tot G de functie $f_3(x) = f_2(f_1(x))$;
- als de functie $f(x) = ax + b$ tot G behoort, dan behoort ook tot G diens inverse functie $f^{\text{inv}}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.

Bewijs dat er een getal k bestaat zo, dat $f(k) = k$ voor elke f in G geldt.

Neem aan dat $f_1(x) = a_1x + b_1$ en $f_2(x) = a_2x + b_2$ twee functies van G zijn met $a_1 \neq 1$ en $a_2 \neq 1$. Nu behoren tot G ook de functies

$$f_3(x) = f_2(f_1(x)) = a_1a_2x + (a_2b_1 + b_2)$$
$$f_4(x) = f_1(f_2(x)) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$$

en ook

$$f_5(x) = f_3(f_4^{\text{inv}}(x)) = x + \{(a_2b_1 + b_2) - (a_1b_2 + b_1)\}$$

Passen we het eerste gegeven toe op f_5, dan vinden we dat

$$a_2 b_1 + b_2 = a_1 b_2 + b_1, \text{ dus dat } b_1/(a_1 - 1) = b_2/(a_2 - 1)$$

en dit betekent dat de wortels van $f_1(x) = x$ en $f_2(x) = x$ gelijk zijn!

Hieruit concluderen we, dat er een k bestaat zo, dat $f(k) = k$ geldt voor elke $f(x) = ax + b$ in G waarvoor $a \neq 1$.
De enige functie in G met $a = 1$ kan op grond van het eerste gegeven alleen nog maar de identieke functie zijn. Ook hiervoor geldt $f(k) = k$.

Gemiddelde score	27,1 punten
spreiding	15,6 punten
onze score	17 punten (gedeelde 11de en 12de plaats)

VI Zweden (8 punten)

Laat $a_1, \ldots, a_n$ een n-tal gegeven positieve getallen zijn en laat q een gegeven getal zijn zo, dat $0 < q < 1$.
Bepaal nu een n-tal getallen $b_1, \ldots, b_n$ zo, dat

$$a_k < b_k \quad \text{voor} \quad k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

$$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q} \quad \text{voor} \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

$$b_1 + \ldots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + \ldots + a_n) \tag{3}$$

We nemen aan dat $n > 1$ is (voor $n = 1$ is de opgave triviaal).
Stel $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Door (2) toe te passen voor $k = i, \ldots, j-1$ vinden we

$$b_i q^{j-i} < b_j < b_i q^{-(j-i)}$$

Met behulp van (1) volgt daaruit

$$b_i > a_j q^{j-i} \quad \text{en} \quad b_j > a_i q^{j-i}$$

Voor alle i, j zal dus moeten gelden

$$b_i > a_j q^{|j-i|}$$

en dus voor alle i

$$b_i > \max_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j q^{|j-i|}$$

Definieert men nu voor alle i

$$b_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j q^{|j-i|}$$

dan is (voor $n > 1$) aan deze nodige voorwaarde voldaan en dan blijkt zonder al te veel moeite ook aan de voorwaarden (1), (2) en (3) voldaan te zijn. Bij het bewijs dat aan (3) voldaan is wordt gebruik gemaakt van de theorie van de sommeerbare meetkundige rijen.

Gemiddelde score 9,3 punten
spreiding 8,6 punten
onze score 8 punten (gedeelde 7de, 8ste en 9de plaats).

Regionale werkgroepen Didactiek van de wiskunde

Bij verschillende gelegenheden is gepleit voor het oprichten van regionale werkgroepen waar wiskundeleraren met elkaar kunnen spreken over didactische problemen. De didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wil proberen dergelijke werkgroepen te organiseren. Zij stelt zich voor er in het cursusjaar 1974-1975 maximaal zes voor te bereiden. De werkgroepen zullen worden geleid door wiskundeleraren, die de programma's tevoren met de didactiekcommissie doorgesproken hebben.
Elke bijeenkomst zal drie tot vier klokuren duren. De commissie denkt aan perioden van 16-20.30, onderbroken door een broodmaaltijd. Andere perioden zijn in onderling overleg natuurlijk ook mogelijk.
Uit vele mogelijkheden heeft de commissie voor de eerste drie à vier bijeenkomsten gekozen voor het onderwerp lesvoorbereiding en lesevaluatie met de nadruk op leerstofordening en doelstellingen.
Van de deelnemers zal enig huiswerk gevraagd worden in de vorm van literatuurstudie en het toepassen van het besprokene in hun eigen lessen. Van dit laatste brengen zij in een volgende bijeenkomst verslag uit.
Als literatuur zal een keuze gemaakt worden uit hoofdstukken uit: Van Dormolen, Didactiek van de wiskunde (Oosthoek, Utrecht, 1974), Van Hiele, Begrip en inzicht (Muusses, Purmerend, 1973), Van Parreren, Leren op school (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971) en Skemp, Wiskundig denken (Aula-reeks, 1973). In totaal zal hiervoor een kleine zeventig gulden uitgetrokken moeten worden.
De eerste vijf bijeenkomsten zullen plaats vinden in resp. september, oktober, december 1974 en januari, februari 1975. Een zesde bijeenkomst kan op verzoek van deelnemers worden georganiseerd. Tijd en plaats en datum van de eerste bijeenkomst wordt bepaald door de werkgroepleider; van de andere bijeenkomsten in onderling overleg.
Er hebben zich een twintigtal leraren als werkgroepleider beschikbaar gesteld. Per groep zal het aantal deelnemers niet meer dan 15 kunnen zijn. Er zijn de volgende mogelijkheden: Alkmaar (1 groep), Amersfoort (2 groepen), Amstelveen (1), Amsterdam (5), Arnhem (1), Assen (1), Blerick (1), Boxtel (1), Den Bosch (2), Doetinchem (1), Dordrecht (1), Eindhoven (2), Groningen (1), Schimmert (1), Terborg (1), Utrecht (1).
Alle kosten moeten door de deelnemers zelf gedragen worden.
Wie aan deze werkgroepen deel wil nemen wordt verzocht dit een dezer dagen, maar in elk geval vóór 1 juli 1974 op te geven bij de secretaris van de didactiekcommissie van de NVW, Drs. H.G.B. Broekman, p/a Ped.-Did. Inst. v.d. Leraarsopleiding, Budapestlaan 6, Utrecht onder vermelding van *naam, adres, telefoonnummer, school* en *plaats van voorkeur* met eventueel een tweede keus.

DIDACTISCHE LITERATUUR

uit buitenlandse tijdschriften

Praxis der Mathematik, XIV[8]-XV[6]; augustus 1972-juni 1973

G. Schrage, Ein topologisches Spiel zum Sperner-Lemma;
W. Ness, Der Fundamentalsatz der Arithmetik;
W. Ness, Uber das Rechnen mit hyperkomplexen Zahlen;
J.E. Hofmann, R. Bombelli-Erstentdecker des Imaginären;
Kl. Kursawe, Reelle Funktionen durch Umdeutung von Ziffernfolgen.

G. Schostack, Die ganz-rationale Funktion;
Fr. Feest, Hexagonales Schema für Kreisfunktionen;
H. Heimüller, Das Stücklistenproblem;
U. Beck, Ein anschauliches Verknüpfungsgebilde.

J. Kofler, Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt der grosze Fermat-Satz?
H. Hering, Nochmals: Minimaleigenschaft des Dreiersystems;
H. Töpfer, Darstellende Geometrie.

V. Hönig, Lösung algebraischer Gleichungen mittels Zirkulanten;
H. Schneider, Diagnostische Fluszdiagramme.

Fr. Haeberlen, Die Ellipse als verkürzte Hypozykloide;
H. Zeitler, Inzidenzstrukturen und Koalitionsbildung;
J.E. Hofmann, Mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach

H. Gorenflo, Besondere Stellenwertsysteme;
H.J. Vollrath, Charakterisierungen der Ganzteilfunktion;
H. Hagenkölter, Die Euler-Gerade;
Kl. Wigand, Zweiter IMUK-Kongresz in Exeter 1972.

H. Hering, Darstellungsoptimierung in Stellenwertsysteme;
Kl. Wigand, Faktoranalyse;
D. Reuter, Euler-Konstante in der Kollegstufe;
H. von Majewski, Was ist eigentlich ein Winkel?
Töpfer, Mathematik und Informatik an der Universität Fridericiana (T.H.), Karlsruhe.

J. Kofler, Goldbach-Vermutung fast sicher!
H. von Majewski; Ein Weg zur Formel für Sin $(\alpha + \beta)$;
Kl. Ulshöfer, Transformationsgruppen und ganze Zahlen;
R. Rose, Simultandarstellung getrennter Funktionen;
B. Szöke, Eine mechanische Parabelkonstruktion.

Aulis-Förderpreis, Sektion Mathematik 1973 an Prof.Dr. Jos. E. Hofmann;
H. Schumann, Geometrische Maximum-Aufgabe für Klasse 6;
S. Fuchs-Seliger, Zahlen der Form $(\sqrt{n+t} - \sqrt{n})^2$;
J. Schönbeck, Spiegelungen in der euklidischen Ebene;
H. von Majewski, Hüllen mit sehr geringer Wandstärke.

D. Sommer, Das Cobweb-Theorem;
H. Frasch, Bundeswettbewerk Mathematik 1972/73;
H. Hering, Iterative Berechnungen von Quadratwurzeln;
J. Sors, Die Orientierung von Funktionalen der Form $\sum_{k=i}^{m} a_k$;
Erste USA-Mathematik-Olympiade.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public;
285-288, september 1972-april 1973.

H. Bareil, F. Colmez en anderen, Les journées de Caen;
J.M. Chevallier, Matériaux pour un dictionnaire;
G. Walusinski, Matériaux pour une bibliographie;
G. Glaeser, Une bouffée d'air pur;
La vie de l'A.P.M.E.P.

H. Bareil, Interdisciplinarité;
M. de Cointet, A propos d'un texte d'Einstein;
J.M. Legay en J. Pontier, La mathématique, pour quoi faire?
F. Salles et R. Boirel, Differentiation et intégration;
Y. Grenthe, Dessin et mathématique;
B. Parzysz, L'aveugle et le paralytique;
R. Rougée, Vecteurs, glisseurs, torseurs;
J. Chabrier, La mathématique et les autres disciplines;
G. Letac, Les problèmes de l'A.P.M.E.P.;
H. Bareil, Les clubs mathématiques;
M. Lassave, Examens et programmes.

C. Boucher, Jeux de simulation;
P. Gagnaire, D'Euclide à Fibonacci;
G. Bal, Propositions sur l'initiation mathématique;
R. Szajnfeld, Pour un enseignement mathématique accessible à tous;
D. Feneuille, Echec ou expérience?
L. Duvert, Ensembles et accolades;
M. Petit, A propos de l'antisymmétrie;
J. Kuntzmann, Présentation algorithmique des notions ensemblistes et logiques.

M. Vogt, Géométrie;
P. Antonini, Le guépier 'affine';
E.C. Martin, Un projet américain de recherche;
J. Chevallier, L'abus de l'abus;
J. Adda, L'apport des réunions internationales;
Les Olympiades
C. Lassave, Une réforme continue;

L. Lierab, Soyez donc bon professeur.

Y. Crozes, Enseigner la mathématique ajourd'hui;
R. Dussaud, Dénombrements et groupe symmetrique;
L. Schluraff, A propos de probabilité conditionnelle;
J.M. Chevallier, Matériaux pour un dictionnaire;
J. Weil, Analyse combinatoire;
T. Kawaguchi, Formation des professeurs de mathématiques du Japon;
P. Chevallier, Les mathématiques spéciales existent.

Elemente der Mathematik, XXVII[6]-XXVIII[3], november 1972-mei 1973.

J. Steinig, Some trigonometric inequalities;
R. Jeltsch, Uber hebbare Unstetigkeiten;
A. Makowski, Remark on multiplicative functions;
H.J. Vollrath, Zur Charakterisierung von Kongruenzrelation durch Abbildungen;
M. Jeger, Zugehörigkeitstafeln und charakteristische Funktionen;
F. Hohler, Eine Klasse vin Abzählprobleme.

W. Wunderlich, Uber Peano-Kurven;
E. Kreyszig und A. Pendl, Uber die Gausz-Krümmung;
G. Ewald, Uber geschlossene Raumkurven ohne einbeschriebenes Parallelogram;
A. Rotkiewicz, On pyramidical numbers of order 4.

H. Gross, Herr Professor B.L. von der Waerden feierte seinen siebzigsten Geburtstag (2-2-1973);
B.L. van der Waerden, Uber Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik; Abschiedsrede;
H. Guggenheimer, Uber das Verhalten der Gausznen Krümmung bei Affinität;
J. Bokowski, Eine verschärfte Ungleichung zwischen Volume, Oberfläche und Inkugelradius;
J. Binz und P. Wilker, Mathematische Problemwettbewerk in Kanton Bern.
J.M. Wills, Zur Gitterpunktanzahl konvexer Menge;

B. Herz und J. Kaapke, Ein isometrisches Problem mit Nebenbedingung;
H.J. Kanold, Uber einige elementare Abschätzungen von e;
D. Bode, Uber die diophantische Gleichung;
W. Streb, Eine Kennzeichnung endlicher nilpotenter Ringe.

Boekbespreking

Dr. P.M. van Hiele, *Begrip en Inzicht*. Werkboek van de wiskundedidaktiek; 230 blz., gebonden ƒ 27,50; Muusses Purmerend, 1973.

Een boeiend boek, van grote waarde voor de wiskundedocenten op al onze scholen voor voortgezet onderwijs.
De beginnende leraar wordt erin geconfronteerd met tal van concrete leersituaties die hem de ogen kunnen openen voor didactische problematiek, onverschillig of het nu gaat over de relatie tussen evenredige getallenrijen, over de functie van grafieken in het algebra-onderwijs, over stelsels lineaire vergelijkingen, dan wel over het breukbegrip of over het rekenen met logaritmen. Maar ook de leraar met ervaring zal uit deze artikelen veel kunnen leren. Van Hiele's analyse kan ertoe leiden dat hij er naar zal streven zich voortaan meer kritisch te gaan opstellen tegenover zijn eigen onderwijspraktijk, tegenover leerstofkeuze, leervorm en werkvorm.
Voor iedere leraar is het van belang dat hij op de hoogte komt van Van Hiele's theorie van de denkniveaus en de fasen in elk leerproces te onderscheiden; voorts van zijn beschouwingen over de motivatie, over de betekenis van de leerintentie in het leerproces en van zijn rubricering van de doelstellingen van ons wiskunde-onderwijs.
De beschouwingen over de niveaustructuur van de argumentatie en over de didactische consequenties waartoe de theorie van de denkniveaus leidt vormen het hoofdthema van de gehele bundel en leveren het skelet voor Van Hiele's persoonlijke didaktiek.
De meeste artikelen zijn kort, de gemiddelde lengte ervan is 9 bladzijden. Het langste van de serie, handelende over de ontwikkeling van het getalbegrip bij het kind, beslaat 21 bladzijden. Het is van belang, omdat Van Hiele er zijn standpunt in uiteenzet tegenover Piaget's befaamde ontwikkelingspsychologische opvattingen. Van Hiele maakt duidelijk dat Piaget terecht een aantal fasen onderscheidt in de begripsvorming, maar laat uitkomen dat deze opgevat dienen te worden als fasen in elk leerproces, waardoor Piaget's theorie in een didactische leer kon worden getransformeerd.
Vele artikelen uit de bundel zijn reeds eerder verschenen. Sommige bevatten bewerkingen van onderdelen van publicaties van grotere omvang van de hand van Van Hiele, andere zijn oorspronkelijk in het duits of het engels verschenen. Ze bestrijken een periode van ongeveer twintig jaar. Sommige werden eerder gepubliceerd in Euclides, in Vernieuwing, in Paedagogische Studiën, in rapporten van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, in de Acta Paedagogica Ultrajectina, in Westermann's Pädagogische Beiträge of elders, maar werden voor de bundeling opnieuw bewerkt. Een enkel artikel droeg in de oorspronkelijke uitgave mede de naam van Mevrouw Van Hiele-Geldof als auteur. Ook fragmenten uit Van Hiele's proefschrift uit 1957, 'De problematiek van het inzicht' treffen we in de bundel aan.
We wensen dit boek gaarne een ruime lezerskring toe. Wat de daadwerkelijke belangstelling op didactisch gebied betreft is er echter naar mijn mening op het ogenblik een stroom èn een tegenstroom te constateren. Aan de ene kant is sinds de tweede wereldoorlog de belangstelling voor didactische problemen sterk gestegen zoals geïllustreerd kan worden door de plaats van de didaktiek in de leraarsopleiding, door de verschijning van nieuwe tijdschriften en door de activiteit rondom CMLW en IOWO. Aan de andere kant ontkom ik echter niet aan de indruk dat de Nederlandse leraar van vandaag zozeer in beslag genomen dreigt te worden door nieuwe wiskundestof in verband met veranderde en veranderende leerprogramma's èn door de problematiek van de steeds complexer wordende schoolorganisatie dat voor rustige didactische bezinning weinig tijd meer beschikbaar blijft.
In deze situatie zal naar mijn mening een boek als dat van Van Hiele een stimulans kunnen zijn voor een bezinning op de structuur van het eigen onderwijsproces en op de achtergronden en doelstellingen van ons wiskunde-onderwijs, een bezinning die ook heilzaam zal kunnen werken bij die lezers die de conclusies die de auteur voor eigen lespraktijk trekt niet voor de volle honderd procent tot de hunne kunnen maken.

De auteur gaf zijn boek als ondertitel mee: 'werkboek van de wiskunde-didaktiek', een op het eerste gezicht voor sommigen misschien wel wat duistere kwalificatie. Maar op p. 53 lezen we, dat Van Hiele een werkboek beschouwt als een leerboek dat voor het beoogde leerproces de fasen van de vrije en de gebonden oriëntatie verzorgt, en de nodige informatie en explicitering opneemt. Dat wil dus zeggen: alle door hem onderscheiden fasen op die van de integratie na! En dat klopt dan voor deze bundel, evenals het juist is voor de tot dusver door Van Hiele in samenwerking met anderen geschreven schoolboeken.

Ontbreekt die integrale fase ook in de werken van andere auteurs? Naast bundels van opstellen zijn er in ons land maar weinig boeken geweest waarvan de auteurs de pretentie hadden een vakdidaktiek voor de wiskunde te schrijven. Ik denk aan het werk van Schuh, Versluys en De Gelder en zie er dus hoogstens drie. Niet veel voor een periode van anderhalve eeuw!

In 1940 schreef Schuh zijn 'didactiek en methodiek van de wiskunde', bedoeld als leidraad voor ieder die wiskunde studeerde of wiskunde-onderwijs gaf. Ondanks waardevolle paragrafen kwam dit boek toch in feite niet uit boven het niveau van een leidraad voor studie- en examendril.

In 1874 schreef de nog jonge Versluys zijn 'methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van het vak', een wat haastig samengestelde compilatie van destijds gangbare opvattingen. Een gunstige beïnvloeding ervan op het onderwijs was er dan ook nauwelijks van te verwachten.

Iets meer waardering kan ik opbrengen voor de oudste mij bekende wiskundedidaktiek hier te lande, die van De Gelder. Deze schreef in 1826 in de wijdlopige stijl die kenmerkend was voor zijn tijd een 'Verhandeling over het verband en den zamenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen, en over de wijze, om zich dezelfde eigen te maken en aan anderen mede te deelen' met een laatste hoofdstuk 'over de methodus docendi in de studie der wiskundige wetenschappen te volgen'. De Gelder neemt uitvoerige lesschetsen op in zijn boek als propaganda voor de heuristische, socratische methode, die hij in de plaats gesteld wil zien van de gangbare kathedermethode. Ook voor deze socratische methode heeft Van Hiele anderhalve eeuw later nog waardering, al onderkent hij vele door De Gelder nog niet aangewezen gevaren. In zijn streven naar individualiserende methoden neemt het anders georiënteerde klassegesprek in de fase van de explicitering bij Van Hiele een belangrijke plaats in.

Hoewel aan De Gelder's didaktiek maar een kortstondige en op mislukking uitgelopen onderwijspraktijk aan Latijnse Scholen ten grondslag lag, doet het weldadig aan opvattingen verdedigd te zien die het slaan van een brug naar de beter gefundeerde didactische inzichten van Van Hiele niet onmogelijk maken. Zo lees ik:

'Men beginne met de zinnelijke beschouwing der dingen, rangschikke dezelve in eene geschikte orde, leert ze in die orde opmerken, in derzelver samenhang bestudeeren en eindige met ze eindelijk onder een algemeen gezichtspunt te leeren omvatten'.

'De leerling leert zich zelve, de onderwijzer bestuurt den loop der studiën'.

De Gelder waarschuwt tegen het teveel van buiten leren en schrijft: 'Zulk een van buiten leeren acht ik alleen nuttig en noodzakelijk, wanneer men vooraf reeds goed begrepen heeft en verstaat, wat men zal van buiten leeren'.

Voorzover deze gedachten in te passen zijn in Van Hiele's didaktiek kan men er van overtuigd zijn, dat zij dank zij een diepgaande analyse van leer- en onderwijsproces, beter worden gefundeerd dan 150 jaar geleden nog het geval was!

Van harte hoop ik dat Van Hiele tijd en gelegenheid zal krijgen zijn werkboek te laten volgen door een integraal leerboek voor de didaktiek der wiskunde, een leerboek dat waarschijnlijk dan het eerste volledige zal zijn dat hier te lande verschijnt. Op p. 167 merkt Van Hiele in dit verband op dat er voor diverse vakken al 'een aantal speciale vakdidaktieken in statu nascendi' zijn. Dit levert dus een hoopvol perspectief!

We misten in dit werkboek een register, maar ik weet uiteraard niet of de auteur dit misschien opzettelijk heeft weggelaten: misschien is het in de geest van het werkboekkarakter voor de hand liggend dat iedere trouwe lezer geacht wordt zelf zo'n index samen te stellen!

Voorts vind ik het jammer dat er achter in het boek geen lijst is opgenomen van boeken die voor verdere studie in aanmerking komen. Ook een bibliografisch overzicht van publicaties van de auteur zelf ontbreekt. In verband met de titel van het werkboek 'Begrip en inzicht' zou in zo'n

bibliografie althans de titel van Van Hiele's proefschrift 'De problematiek van het inzicht' beter relief hebben kunnen krijgen.

Joh. H. Wansink.

Wolfgang Franz, *Topologie I,* Sammlung Göschen, band 6181, W. de Gruyter, Berlin – New York.

Dit werk bevat een inleiding in de verzamelingstheoretische topologie. In dit deelgebied der wiskunde wordt een begrippenapparaat opgebouwd dat tegenwoordig overal in de wiskunde wordt gebruikt. Het gebied mag niet worden verward met het vak 'algebraïsche topologie' – binnen Engelssprekende landen dikwijls gewoon 'topologie' genoemd – waarin met combinatorische, analytische, doch bovenal algebraïsche hulpmiddelen wordt getracht meetkundige structuren te beschrijven en te karakteriseren.
Opvallend aan het onderhavige boekje is de grote hoeveelheid behandeld materiaal. De resencent wordt dikwijls geconfronteerd met dikkere en duurdere werken waarin aanmerkelijk minder geboden wordt. Het niveau is dat van een uitgebreid kandidaatsprogramma voor zuivere wiskundigen.
De behandeling doet inmiddels alweer klassiek aan. De beknopte literatuurlijst bevat geen referentie later dan 1966. Het belangrijkste resultaat van de verzamelingstheoretische topologie uit de 60-er jaren, de stelling van Anderson en Bing dat de separabele Hilbertruimte isomorf is met het aftelbare produkt van open intervallen is niet vermeld. Hieruit moet men overigens niet concluderen dat het boek verouderd is. Modernisering in dit vak bestaat meestal slechts uit wijzigingen in de presentatie – eventueel gecombineerd met afbraak van de inhoud. Gezien de prijs is het geen werkje waaraan de koper zich snel een buil zal vallen.

P. van Emde Boas

R. Bens, H. Roothaer, F. Smissaert, *Opbouw* 5c, Wesmael-Charlier, Namen, 1972, XV + 264 blz.

Ook dit boek is bestemd voor de voorlaatste klas van het voortgezet (secundair) onderwijs. Men kan dit boek kortweg kenschetsen als een leerboek van de analyse tot en met het zoeken van primitieve functies van de eenvoudigste soort. In het eerste hoofdstuk wordt een karakteristiek gegeven van metrische ruimten om zo te komen tot een metrisch gefundeerd omgevingsbegrip. Door middel hiervan wordt een topologische structuur in een metrische ruimte ontwikkeld. Daarna maken de auteurs zich los van de metriek en gaan over tot de algemene (abstracte) definitie van een topologische ruimte. Het begrip wordt verduidelijkt door ook 'ongewone' topologische ruimten te beschouwen. Vanuit de kennis van de topologie komt men tot een definitie van continuïteit en daarna tot een limietdefinitie.
En passant worden de goniometrische functies gedefinieerd door middel van de opwindfunctie, en ook hun inversen.
Nu kan overgegaan worden tot de definitie van de afgeleide in een punt. En dan is het terrein van de differentiaalrekening opengelegd.
Wat de gedachtengang en de gevolgde methode betreft lijkt het boek vrij sterk op in ons land gebruikte methoden. Het graaft echter dieper. Wij zijn vaak tevreden met voorzichtige definities die later, bij voortgezette studie, nog wel eens aanvulling of correctie zullen behoeven. De auteurs van Opbouw zijn daar niet mee tevreden. Zij zetten de puntjes op de i's en zijn slechts tevreden met volledige waarheden. Wiskundig is dit boek dan ook behoorlijk streng, terwijl toch ernaar gestreefd is de tekst bevattelijk te houden. Een goed stuk werk.

P.G.J. Vredenduin

Herbert Meschkowski, *Mathematik als Grundlage*, Deutscher Taschenbuch Verlag, D.M. 5,80, 190 blz.

Dit boekje is blijkens de ondertitel en de inhoud een pleidooi voor begripmatig gericht wiskunde-onderwijs en wiskundig gerichte algemene vorming.
Het is waard, niet alleen zin voor zin, maar ook woord voor woord gelezen te worden. De schrijver toont zich niet alleen competent op het terrein van de wiskunde, maar ook op die van de natuurkunde, de philosofie en de didactiek. Hij legt graag verbanden tussen deze vakken. Een nadeel is, dat eenzelfde zaak soms meermalen ten tonele wordt gevoerd. Zo komen op blz. 38, 78 en 105 beschouwingen over de ontdekking van het onmeetbare voor en op blz. 47 en 109/110 vindt men iets over de kans, dat een koorde van een cirkel langer is dan $r\sqrt{3}$. Zulke herhalingen wekken de indruk, dat de schrijver niet kort voor het ter perse gaan het gehele boek nog eens in-een-ruk heeft nagelezen, een fout, die ik hem wel vergeven moet, omdat ik deze zelf ook wel gemaakt heb.

Overigens is het gemakkelijker een GRAFIEK van dit boek te tekenen, dan er een recensie over te schrijven. Te oordelen naar de in dichtheid toenemende onderstrepingen en aantekeningen, die ik er bij gezet heb, verloopt de grafiek monotoon niet-dalend, en de grafiek van de afgeleide functie heeft naar mijn gevoel een maximum in hoofdstuk 7 met de onderdelen:
1. Het oplossen van problemen, 2. Opvoeding tot het geven van eigen produktie, 3. Opgaven, 4. Oplossingen. Uitgewerkt vindt men in 1: De spanning tussen wiskundige en didactische eisen; een opmerking over de wiskundige ontwikkelingsgang van de mensheid en die van het individu; de noodzaak, de moderne wiskundige denkwijze tot grondslag van het schoolwerk te maken; de enorme groei van de wiskunde sedert 'Bourbaki' zou tot gevolg kunnen hebben, dat weinig tijd voor *zelfstandig denkwerk* overschiet; het is niet voldoende, als een leerling feilloos een categorie opgaven kan maken; het is nodig leerlingen opgaven voor te leggen, die van een bekend schema afwijken; twee groepen zeer algemene hulpmiddelen bij het oplossen van problemen (het hoofdstuk heet: heuristiek); kritiek op de dat-hebben-we-nog-niet-gehad-houding van vele leerlingen.
In 2: Nieuwe denkmethoden toepassen; vrije geestelijke arbeid, scheppende fantasie; succes in denken geeft moed bij het volgende probleem.
In 3: diverse, deels overbekende opgaven, deels in de richting van de rubriek 'recreatie' uit dit tijdschrift en in 4: oplossingen daarvan.

Ik meen, dat de toekomstige lezer door deze vrij uitvoerige indrukken van één enkel hoofdstuk beter ingelicht wordt over de toon en de bedoeling van het boek dan door een dorre opsomming van de namen van elk der twaalf hoofdstukken apart. De bedoeling van de schrijver wordt m.i. bijna volledig gedekt door een uitspraak van de examencommissie wiskunde l.o. 1939, waarin o.a. staat, dat WISKUNDIGE VORMING TE PREFEREREN IS BOVEN WISKUNDIGE AFRICHTING, dat een examinator best kan vragen naar zaken die een kandidaat niet bekend zijn, als hij wiskundig BEGRIP wil testen (ik citeer niet woordelijk, maar uit het hoofd).

De arbeid van de auteur zal niet vergeefs geweest zijn, als onze leraren zich een weinig los durfden te werken van onze examenprogramma's. Dat zou hen gemakkelijker vallen als deze programma's minder *stofomschrijving* (zoals wel parabool, maar geen ellips) maar meer *omschrijving van denkwijzen* zouden geven (b.v. in de l.t.s. wel inductie, maar geen deductie). Dat zou eisen, dat kandidaten bij het maken van examenopgaven vrije keus uit diverse rubrieken zouden hebben.

Wat de totaliteit van het boek betreft: Ik heb geen aanmerkingen te maken, behoudens de simpele vergissing op blz. 52, waar 'log' ontbreekt voor 2; de tekst bovenaan blz. 2 is mij raadselachtig. Tot slot, om een indruk van het geheel te geven, volgen enige vrije vertalingen van passages, die men in het boek kan aantreffen, soms gecombineerd, overigens in volgorde van lectuur.

Beschaving is datgene, wat overblijft, als men vergeten is wat men geleerd heeft.
Onvoorwaardelijk objectief denken (Russell), los van hoop, vrees, haat, liefde. Zijn de schapen, die we daar zien lopen, geschoren? Niet aan de naar ons toegekeerde kant.
Het complementaire principe van Bohr is bijzonder belangrijk voor de 'Bildung' (vorming of beschaving of beide?)
Het nauwkeurig beschrijven van een constructie en het zelf opstellen van een definitie zijn belangrijke bijdragen ter bevordering van een goede stijl. Dit dient niet in de taalles, maar in de wiskundeles te geschieden. De D. en I.-rekening beperke zich niet tot het oplossen van opgaven over extreme waarden.
Waar zit de fout?
Niets is praktischer dan een goede theorie.
De pedagogiek is een kunst. Het zou bij wiskundige fundering een wetenschap zijn (Vrij naar Felix Klein).
In het algemeen is aansluiting bij de historische ontwikkeling de beste methode, een wetenschappelijke theorie begrijpelijk te maken.
Hij behoort nu tot de dichters, voor wiskunde schoot zijn fantasie te kort. Er zijn zelfs nu nog classici, die zich beroemen op hun wiskundige onkunde. KUNNEN WE VERWACHTEN, DAT MENSEN DOOR ZICH MET WIS- EN NATUURKUNDE TE BEMOEIEN NIET ALLEEN VERSTANDIGER, MAAR OOK *BETER* WORDEN?
Wij hebben wiskunde als grondslag van de beschaving aangemerkt.
Als er aparte scholen zijn voor minder begaafden, waarom dan ook niet voor hoogbegaafden? - Deze laatste moeten op de basisschool hun tijd niet verknoeien.
Men eise geen gelijke opleiding voor allen, maar gelijke KANSEN voor allen. OPVOEDING TOT *DYNAMISCH* DENKEN IS VOOR DE VORMING VAN DE MENS VAN DOORSLAGGEVENDE BETEKENIS.
Dit laatste is dan meteen de apotheose van het zeer lezenswaardige boek.

J.K. Timmer

Ontvangen boeken

Van A tot Z, M4-2a, 5e druk, ISBN 90 231 3113 2, f. 10,50 Drs. Chr. Boermeester – B. Burger – Dr. P.M. van Hiele.
Van A tot Z, 1c, 4e druk, ISBN 90 231 3118 5, f. 9,50
Dr. P.M. van Hiele – Ir. K. Kok – H.N. Schuring
Van A tot Z, HV-2a, 2e druk, ISBN 90 231 3119 3, f. 13,90
Dr. P.M. van Hiele – Ir. K. Kok – H.N. Schuring.
Van A tot Z bulletin 8
A tot Z, beknopte goniometrie voor het derde leerjaar.

Rectificatie

In het februari nummer pag. 234 is een passage van een recensie verminkt overgekomen.
Er staat
Het didactische voordeel, dat onze leraren ik toch niet dit kleinood een juweel te noemen. Het didactische voordeel, dat onze leraren de woorden EN ANDERS.
men leze
Het didactische voordeel, dat onze leraren er uit kunnen halen is het zien van de te doceren meetkunde *tegen de achtergrond van de woorden* EN ANDERS.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

313. Uit een verzameling met 12 elementen kiezen we n deelverzamelingen met elk 5 elementen. Elk paar van deze deelverzamelingen heeft precies 2 elementen gemeen. Hoe groot is n maximaal?

314. Iemand heeft twaalf lucifersdoosjes. In elk doosje bevinden zich vijf knikkers. De doosjes zijn genummerd 1 tot en met 12. Elke knikker draagt een van de nummers 1 tot en met 12. In geen enkel doosje bevinden zich twee knikkers met dezelfde nummers. Twee doosjes hebben maximaal twee knikkernummers gemeen. Verder geldt:

doos a bevat knikker $b \Rightarrow$ doos a en doos b hebben precies twee knikkernummers gemeen.

Geef één realisatie hiervan. (B. Kootstra)

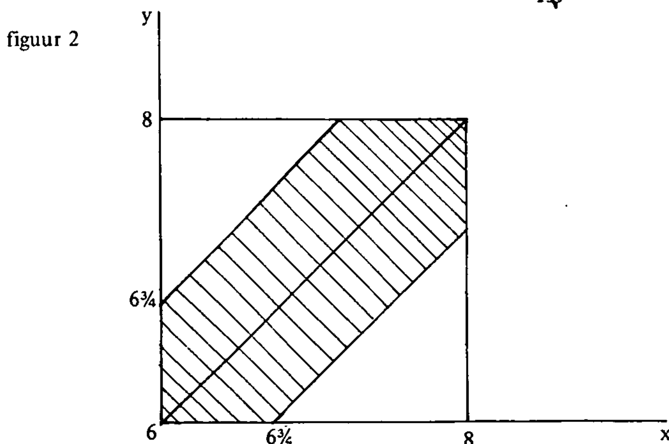
Oplossingen

310. Twee kennissen eten elke dag in hetzelfde restaurant. Ze komen aan, volgens het toeval verdeeld, op tijdstippen tussen 6 en 8 uur. Ze blijven precies drie kwartier. Hoe lang zijn ze gemiddeld tegelijk in het restaurant aanwezig?
In onderstaande figuur stelt x het tijdstip voor waarop A arriveert en y het tijdstip waarop B arriveert. Het gearceerde deel stelt de verzameling van geordende paren tijdstippen (x, y) voor waarbij A en B elkaar niet mislopen. De tijd dat ze dan tegelijk aanwezig zijn, is $\frac{3}{4} - |x - y|$ uur.
De gemiddelde tijd dat ze samen aanwezig zijn, is dus

$$\int (\quad - |x - y|) \tfrac{1}{4}\, dx\, dy$$

geïntegreerd over het gearceerde vlakdeel. (We moeten met $\frac{1}{4}$ vermenigvuldigen, omdat de oppervlakte van het vierkant 4 is.)
Deze integraal is gelijk aan $\frac{1}{4}$ maal de som van de inhouden van twee afgeknotte prisma's. De prisma's hebben elk een loodrechte doorsnede van $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{2}$ en ribben $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ en $\frac{5}{4}\sqrt{2}$. De inhoud van zo'n prisma is dus $\frac{63}{128}$.
De twee kennissen zijn dus gemiddeld tegelijk aanwezig $\frac{63}{256}$ uur.

figuur 2



311. A heeft een aantal loten genummerd 1 tot en met n. Hij trekt deze loten (zonder teruglegging). B raadt elke keer welk lot A getrokken heeft. Na afloop wordt hem meegedeeld, hoe vaak hij goed geraden heeft. Voor elke keer goed raden krijgt hij 1 gulden. Wat is de verwachtingswaarde van het bedrag dat hem uitgekeerd zal worden?
Er zijn $n!$ permutaties van de n loten. B kiest een van deze permutaties. Welke doet er niet toe; laten we gemakshalve aannemen, dat hij juist 1, 2, 3, . . ., n gekozen heeft. Bij $(n - 1)!$ van de $n!$ permutaties staat het getal 1 voorop. Dit levert in elk van deze gevallen voor B alvast 1 gulden op. Bij $(n - 1)!$ permutaties staat 2 op de 2e plaats. Dit levert in elk van deze gevallen voor B weer 1 gulden op. Enzovoorts. De $n!$ permutaties leveren B in totaal dus juist $n!$ gulden op. De verwachtingswaarde is dus 1 gulden.
Wat nu, als B elke keer direct meegedeeld wordt, of hij het goed of fout heeft? In dat geval is er een strategie vóór B, die een hogere verwachtingswaarde oplevert. B zegt namelijk iedere keer 1, totdat hij gelijk krijgt. Hij heeft dan gegarandeerd al 1 gulden. Daarna zegt hij aanhoudend 2, enz. De verwachtingswaarde wordt zo groter dan 1 gulden, immers B krijgt in elk geval 1 gulden en misschien meer.

Statistische Dag 1974

Op donderdag 2 mei 1974 houdt de Vereniging voor Statistiek haar jaarlijkse lezingendag, waaraan een tentoonstelling van statistische hulpmiddelen verbonden is, in de Katholieke Hogeschool te Tilburg.
De Statistische Dag zal worden geopend door de rector-magnificus van de KHT, Prof. Dr. Ir. G.C. Nielen. In de ochtendzitting spreekt Prof. Dr. J.H.P. Paelinck over 'Problemen in de ruimtelijke econometrie'.
In de middagzitting zijn er vier stromen met ieder 3 lezingen, welke onder meer handelen over onderwerpen uit de operationele research, economisch-statistisch onderzoek, loopbaanbegeleiding, bedrijfszekerheid, kwaliteitszorg en mathematische statistiek.
Nadere informatie verleent de Vereniging voor Statistiek, Weena 700 te Rotterdam, eventueel telefonisch via 010-116181 (toestel 2126)

Bericht

DEUTSCHE VEREINIGUNG FÜR MATHEMATISCHE LOGIK UND GRUNDLAGENFORSCHUNG DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN (DVMLG)

Stellungnahme zur Mengenlehre in der Schule
In diesem Schuljahr ist an den Schulen der Bundesrepublik die Einführung der Mengenlehre in den Mathematikunterricht verbindlich geworden. Die neuen Richtlinien sind in der Öffentlichkeit eingehend diskutiert worden. Der Vorstand der Deutschen Vereinigung für mathematische Logik und Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften (DVMLG), der fast alle Universitätslehrer angehören, die auf dem Gebiet der Mengenlehre forschen, möchte mit der folgenden Erklärung zur Diskussion beitragen.

1 In den vervangenen Jahren hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, dass der Mathematikunterricht an den Schulen einer Modernisierung bedarf. Wir befürworten das und möchten durch diese Stellungnahme nicht die Gegner einer solchen Erneuerung bestärken. Doch sehen wir uns veranlasst, kritisch zu dem Stellung zu nehmen, was auf der Schule unter der Bezeichnung 'Mengenlehre' betrieben wird.

2 Die Mengenlehre ist eine wichtige mathematische Disziplin, die jedoch keineswegs im Zentrum des mathematischen Interesses steht. Trotzdem hat sie eine übergreifende Bedeutung, da einfache mengentheoretische Begriffsbildungen und Sprechweisen überall in der modernen Mathematik vorkommen. Auf der Schule spielt allenfalls diese 'Gebrauchsmengenlehre' eine Rolle, die eher eine Sprache als ein eigener mathematischer Stoff ist.

3 Nach unserer Meinung gehört es durchaus zu den Aufgaben des Mathematikunterrichts, den Schüler mit der heutigen mathematischen Sprache bekannt zu machen. Die notwendigen mengentheoretischen Sprechweisen sollten aber allmählich und zwanglos eingeführt werden, und zwar bei der Behandlung anderer mathematischer Stoffe. Denn die mengentheoretische Sprache erweist sich erst dann als nützlich, wenn ein gewisser Bestand an mathematischem Wissen bereits gewonnen ist, dass dann angemessen zu formulieren ist.

4 Dagegen wirkt es gekünstelt, wenn man mengentheoretische Sprechweisen einführt, während man sich ebenso und sogar besser umgangssprachlich ausdrücken kann. Es besteht die grosse Gefahr, dass die Mengenlehre nur als eine Methode erscheint, einfache Sachverhalte kompliziert auszudrücken. Das ist schon weitgehend eingetreten; die Mengenlehre ist zum Schrecken vieler Eltern geworden, und auch manchen Lehrern ist die Relevanz vieler Übungen z.B. zum Einkreisen, Klassifizieren und Zuordnen nicht einsichtig. So wird viel Zeit für eine nur halbverstandene Terminologie angewendet, und es besteht die Gefahr, dass andere Stoffe, die für die Schule geeigneter sind, verdrängt oder nur unzureichend behandelt werden.

5 Die Berücksichtigung der Mengenlehre im Unterricht erfordert in jedem Fall eine sorgfältige Vorbereitung. Hier liegen Versäumnisse vor. Einerseits ist noch keineswegs befriedigend geklärt, wie die mengentheoretischen Begriffsbildungen und Sprechweisen in sinnvoller Weise in den Mathematikunterricht einbezogen werden sollten. Zum anderen sind die Lehrer nicht genügend vorbereitet und sollen jetzt etwas unterrichten, dessen Bedeutung sie zum Teil gar nicht übersehen. Shliesslich enthalten viele Bücher zur Mengenlehre in der Schule unverständlicht und sogar fehlerhafte Formulierungen, die eher geeignet sind, Lehrer und Schüler zu verwirren, als zu einem guten Unterricht beizutragen.

Mai 1973

Für den Vorstand der DVMLG
Prof. Dr. Arnold Oberschelp
Vorsitzender der DVMLG
Universität Kiel

INHOUD